Metody integrace

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
8. června 2017

Text je výběrovým přehledem metod hledání primitivní funkce (nezahrnuje například metodu per partes).

1. Typy substitucí.

1. S inverzní funkcí k substituci:

$$
\begin{array}{ll}
t = a^x & \text{pro } a > 0 \\
t = \log x & \\
t = \sqrt[n]{x} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \\
t = ax + \sqrt{ax^2 + bx + c} & \text{pro } a > 0, b, c \in \mathbb{R} \\
t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} & \\
t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} &
\end{array}
$$

2. Bez požadavku na existenci inverzní funkce k substituci:
   $t = \sin x$, použijeme vztah $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
   $t = \cos x$, použijeme vztah $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

2. Integrace racionální funkce Racionální funkce je podíl polynomů, například

$$R(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x^2 - 1}$$

1. Vydělením převedeme racionální funkci na součet polynomu a racionální funkce s nižším stupněm v čitateli než ve jmenovateli (takovou racionální funkci někdy nazýváme ryze lomenou). Například

$$(x^3 - x + 1) : (2x^2 - 1) = \frac{x}{2} + \frac{-x/2 + 1}{2x^2 - 1}$$

2. Jmenovatele rozložíme na součin – vždy je to možné alespoň teoreticky (prakticky to může zhavarovat na řešení rovnice vyššího řádu) na součin lineárních mnohočlenů a kvadratických bez reálných kořenů. Například

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 1 &= \left(x\sqrt{2} + 1\right)\left(x\sqrt{2} - 1\right) \\
x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) \\
x^3 + 3x - 4 &= (x - 1)(x^2 + x + 4) \\
x^3 - 4x + 3 &= (x - 1)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

   U posledních dvou polynomů „uhodneme“ dosazením kořen $x_1 = 1$, vydělíme kořenovým činitelem $x - 1$ a v případě dalších reálných kořenů ještě dála rozložíme.

3. Napíšeme parciální zlomky. V případě násobných kořenů je potřeba zahrnou všechny i nižší mocniny. Například

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+2)^3(x-3)(x^2-2x+2)^2(x^2+1)^3} &= \frac{A}{(x+2)^3}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-3}+\\ &+\frac{Ex+F}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{Gx+H}{x^2-2x+2}+\\ &+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}+\frac{Kx+L}{(x^2+1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\end{aligned}$$

Všimněte si, že stupeň jmenovatele (14) je stejný jako počet neurčitých $A, B, \ldots, N$. Není to náhoda, je to tak vždy a zajistí nám to soustavu lineárních rovnic se čtvercovou maticí (v tomto případě 14×14).

3b. Nalezneme hodnoty neurčitých součinitelů.

4. Nalezneme primitivní ufnkci k parciálním zlomkům.

   (a)
   $$R(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}, a, A \in \mathbb{R}$$

   Primitivní funkci nalezneme pomocí vzorců pro primitivní funkce k mocninným funkcím. Pozor na odlišný případ $n = 1$.

   (b)
   $$\begin{aligned}R(x) &= \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\\ &\ \text{pro } n \in \mathbb{N}, A, B, a, b, c \in \mathbb{R},\ \text{jmenovatel nemá reálné kořeny}\end{aligned}$$

   Integraci jsme probírali jen pro případ $n = 1$. Čitatele $Ax + B$ upravíme na součet násobku derivace jmenovatele a konstanty

   $$A/(2a)(2ax+b) + (B - Ab/(2a))$$

   Zlomek pak napíšeme jako součet dvou zlomků – první zintegrujeme substitucí za jmenovatele (vede na logaritmus), druhý doplněním na čtverec (vede na arkustangens).

3. Metoda neurčitých součinitelů. O této metodě jsme se zmínili při integraci funkce $f : x \mapsto x^3 \exp(x)$. Vycházíme z toho, že derivace funkce, která je součinem polynomu P_n stupně n a exponenciální funkce, je také součin polynomu (odlišného od polynomu P_n) a exponenciální funkce

$$(P_n(x)\exp(\alpha x))' = (P_n'(x) + \alpha P_n(x))\exp(\alpha x)$$

Primitivní funkci k funkci f tedy hledáme ve tvaru $(ax^3 + bx^2 + cx + d)\exp(x)$ z rovnice

$$\big((ax^3+bx^2+cx+d)\exp(x)\big)' = x^3\exp(x)$$

Pro úplnost uveďme (nebude v požadavcích ke zkoušce), že podobně můžeme hledat primitivní funkci k funkcím

$$g : x \mapsto P_n(x)\sin(\alpha x) \qquad h : x \mapsto P_n(x)\cos(\alpha x)$$

ve tvaru (Q_n, S_n jsou polynomy stejného stupně jako P_n)

$$Q_n(x)\sin(\alpha x) + S_n(x)\cos(\beta x)$$

a k funkcím

$$g : x \mapsto P_n(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x) \qquad h : x \mapsto P_n(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x)$$

ve tvaru (Q_n, S_n jsou opět polynomy stejného stupně jako P_n)

$$Q_n(x)\exp(\alpha x)\sin(\beta x) + S_n(x)\exp(\alpha x)\cos(\beta x)$$