Primitivní funkce, Určitý integrál Riemannův integrál, Newtonův integrál

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
24. května 2017

1. Primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I.
TODO
Smysl (přesněji nesmyslnost) vzorce $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + C$.

2. Určitý integrál. Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b), kde a,b mohou nabývat i nekonečných hodnot, a pokud existují limity $\lim_{x\to b^-} F(x)$, $\lim_{x\to a^+} F(x)$ a jejich rozdíl (limity mohou být nevlastní), nazýváme tento rozdíl *určitým integrálem funkce f na intervalu* (a,b) a značíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (případně stručněji $\int_a^b f(x)$, je-li z kontextu jasná integrační proměnná x):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

3. Výpočet a vlastnosti určitého integrálu. Počítáme-li určitý integrál z funkce f na intervalu (a,b) a máme-li k dispozici primitivní funkci F na „větším“ intervalu (α,β) (tedy $\alpha < a$, $b < \beta$), pak je F v bodech a, b spojitá (protože v nich má konečnou derivaci) a limity jsou tedy rovny funkčním hodnotám

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Odtud je (snadno) vidět, že pro $a < b < c$ platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tento vztah zůstane v platnosti pro libovolnou trojici $a,b,c \in (\alpha,\beta)$, pokud pro $g,h \in (\alpha,\beta)$, $g > h$ definujeme

$$\int_g^g f(x)\,\mathrm{d}x := 0 \qquad \int_g^h f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_h^g f(x)\,\mathrm{d}x.$$

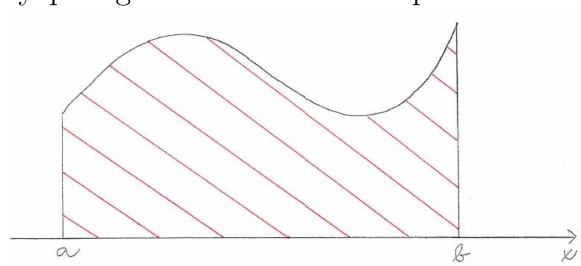
4. Určitý integrál s proměnnou horní mezí. Má-li funkce k f na (a,b) určitý integrál, $c \in (a,b)$, pak je funkce

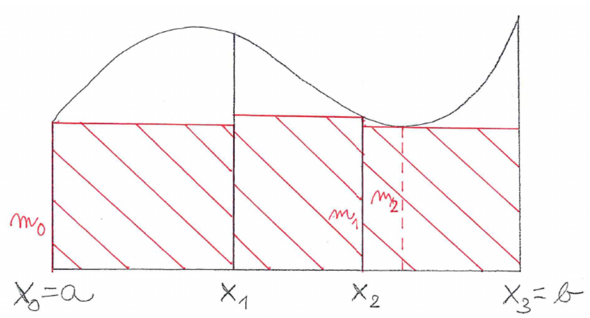
$$F : t \mapsto \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

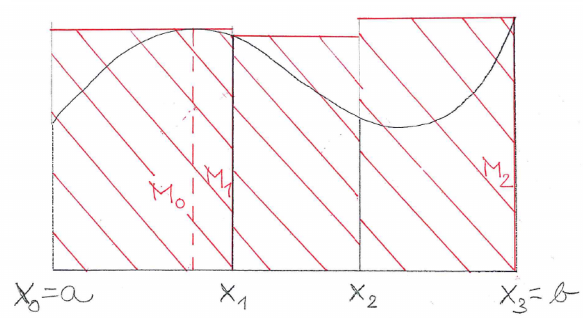
primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b), která navíc splňuje $F(c) = 0$. Integrál v (1) nazýváme *integrálem s proměnnou horní mezí.*

5. Poznámka. Předchozí odstavce vysvětlují, jak lze pomocí primitivní funkce vypočíst určitý integrál a naopak, jak lze pomocí určitého integrálu vyjádřit primitivní funkci.

6. Riemannův integrál počítá obsah plochy pod grafem omezené nezáporné funkce na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$ (viz obrázek vpravo). Dolní a horní odhad této plochy získáme, když interval $[a, b]$ rozdělíme na několik intervalů – na obrázcích dole je to na tři intervaly $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$.







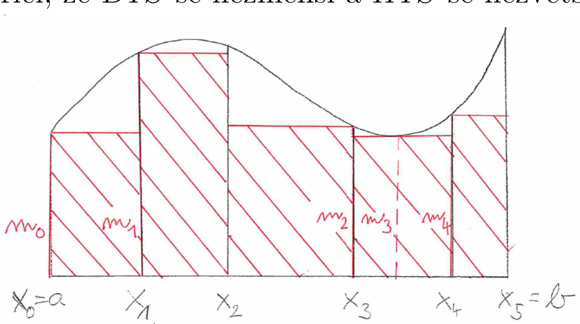
Na každém z intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ nahradíme funkci konstantní funkcí o hodnotách

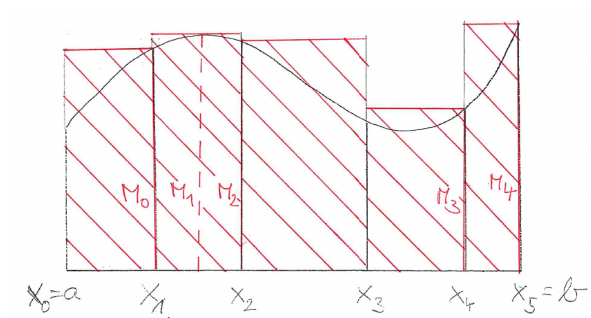
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

Součet obsahů vyšrafovaných obdélníků budeme nazývat *dolním, případně horním, integrálním součtem* funkce f na intervalu $[a, b]$ s dělením $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, x_2\}$ a značit DIS, případně HIS.

$$\begin{aligned} DIS &= m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + m_2(x_3 - x_2) \\ HIS &= M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + M_2(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Další obrázky ilustrují co se stane, když do dělení $\mathcal{D}$ přidáme další dělící body. DIS se zvětší a HIS se zmenší (v obecném případě může zůstat stejný; správné je v tom případě říci, že DIS se nezmenší a HIS se nezvětší).





Při hodně jemném dělení budou hodnoty DIS a HIS hodně blízké (v našem případě; v dalším textu ukážeme, že pro „divočejší“ funkce, například Dirichletovu funkci, tomu tak být nemusí).

Supremum hodnot DIS nazýváme *dolním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, b]$, značíme

$$(\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Infimum hodnot HIS nazýváme *horním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, b]$, značíme

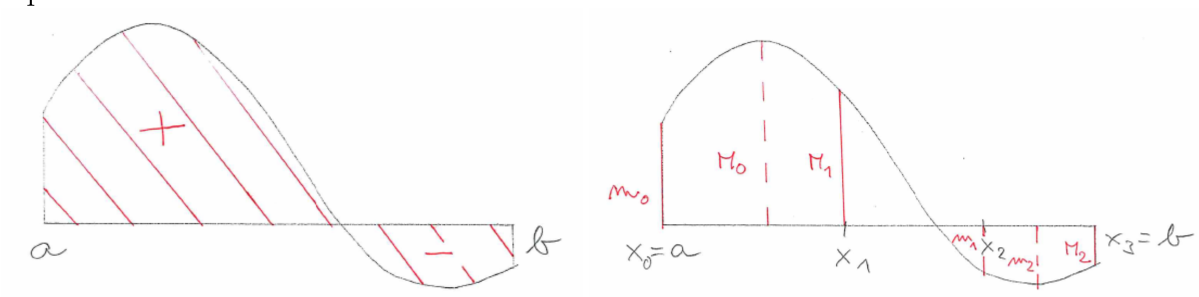
$$(\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkci f nazveme *Riemannovsky integrovatelnou na intervalu* (a, b), pokud se její horní Riemannův integrál rovná jejímu dolnímu Riemannovu integrálu. Tuto společnou hodnotu pak nazýváme *Riemannovým integrálem funkce* f *na intervalu* (a, b) a značíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. Příklad. Dirichletova funkce, která nabývá hodnoty jedna pro racionální argumenty a hodnoty nula pro iracionální argumenty, není na intervalu $I = [0, 1]$ Riemannovsky integrovatelná. Rozmyslete si, že pro libovolné dělení intervalu I jsou všechny hodnoty m_i rovny nule a všechny hodnoty M_i rovny jedné. Horní Riemannův integrál je tedy roven jedné zatímco dolní Riemannův integrál je roven nule.

8. Riemannův integrál obecnější funkce. V odstavci 6 jsme předpokládali, že integrovaná funkce je nezáporná. V obecném případě je Riemannův integrál definován stejně, čísla m_i, M_i mohou být záporná a stejně tak dolní a horní integrální součty a dolní a horní Riemannův integrál. Hodnota integrálu je pak rovna rozdílu obsahů částí nad osou a pod osou.

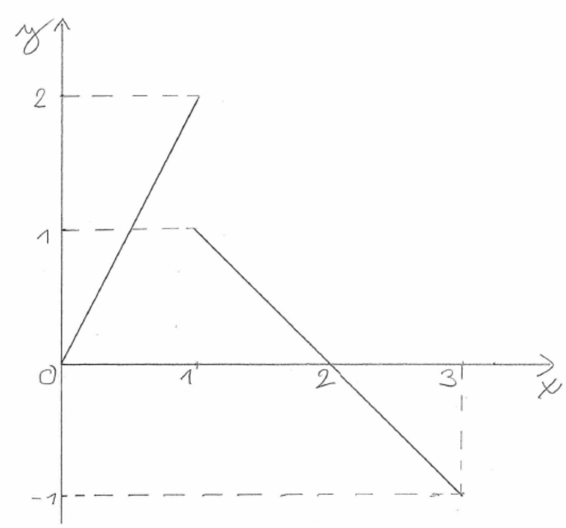


9. Příklad: Riemannův integrál po částech spojité funkce. Vypočtěte Riemannův integrál s proměnnou horní mezí po částech lineární funkce f dané grafem vpravo. Výpočet proveďte prostředky elementární geometrie.

V kterých bodech $t \in (0, 3)$ má funkce R derivaci a čemu je rovna?

$$R : t \mapsto (\mathcal{R}) \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

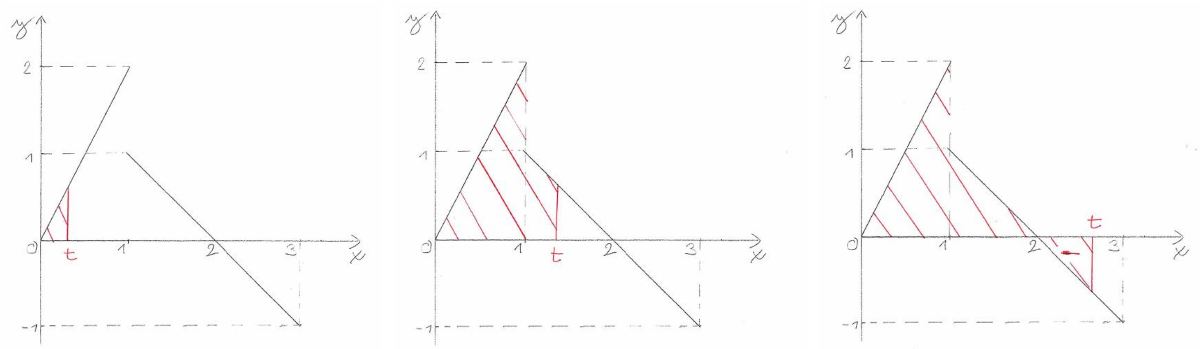
Jak je to se spojitostí funkcí f a R? Speciálně: jsou spojité v bodě 1?



10. Řešení příkladu 9. Hodnota $R(t)$ je rovna obsahu případně součtům či rozdílům obsahů víceúhelníků vyšrafovaných na obrázcích dole.

Pro $t \in (0,1]$ je $R(t)$ rovno obsahu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o velikosti t, $2t$, tedy $R(t) = t^2$.

Pro $t \in (1,2]$ je $R(t)$ rovno součtu obsahů pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o velikosti 1, 2 a lichoběžníku s výškou (v této poloze spíš „šířkou“) o velikosti $t-1$ a se základnami o velikosti 1, $1-(t-1)$, tedy $R(t) = 1 + \frac{1}{2}(3-t)(t-1)$.



Pro $t \in (2,3]$ je $R(t)$ rovno součtu obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků a od něj odečteného obsahu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku pod osou x s velikostí ramene $t-2$. Tedy $R(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(t-2)^2$.
Shrnuto (a po úpravě)

$$R(t) = \begin{cases} t^2 & t \in (0,1] \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{1}{2} & t \in (1,3] \end{cases}$$

Derivace pro $t \neq 1$ (v bodě jedna funkce R derivaci nemá):

$$R'(t) = \begin{cases} 2t & t \in (0,1) \\ -t+2 & t \in (1,3) \end{cases}$$

Všimněte si, že pro $t \in (0,1) \cup (1,3)$ je $R'(x) = f(x)$. Přirozená otázka je, zda je to náhoda. Odpověď je: není. V odstavci 12 ukážeme, že v bodech spojitosti funkce f platí $R'(x) = f(x)$. K tomu použijeme vlastnosti Riemannova integrálu, které uvedeme v odstavci 11.

Ještě bychom měli odpovědět na otázku o spojitosti funkcí R, f v bodě jedna. Jednostranné limity funkce f v bodě jedna určíme z grafu. Protože se nerovnají, není funkce f v bodě jedna spojitá. Jednostranné limity funkce R v bodě jedna zjistíme dosazením $t = 1$ do předpisů funkce na jednotlivých intervalech. Protože jsou obě tyto limity i funkční hodnota rovny jedné (vidíte tyto hodnoty na grafu funkce f?), je funkce R v bodě jedna spojitá. V bodech $t \in (0,1) \cup (1,3)$ jsou obě funkce f, R spojité. Funkce R je tedy spojitá na celém intervalu $(0,3)$.

11. Vlastnosti Riemannova integrálu. Ve tvrzeních předpokládáme, že příslušné integrály existují.

1. **Nezápornost.**
   Integrál z nezáporné funkce je nezáporný:

$$(\forall x \in (a,b))(f(x) \geq 0) \Rightarrow (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \geq 0$$

(Podmínka $f(x) \geq 0$ znamená, že graf funkce f leží nad osou x. Dolní i horní integrální součty jsou proto nezáporné.)

2. **Monotonie.**
   Integrál z „větší“ funkce je větší:
   $$(\forall x \in (a,b))(f(x) \geq g(x)) \Rightarrow (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \geq (\mathcal{R}) \int_a^b g(x)$$
   TODO: obrázek

3. **Aditivita vzhledem k integračnímu oboru**
   Pro $a < b < c$ platí
   $$(\mathcal{R}) \int_a^c f(x) = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) + (\mathcal{R}) \int_b^c f(x)$$
   (Integrál na levé straně je obsah obrazce (nakreslete) – pokud ho rozstřihneme (stačí v myšlenkách) po úsečce o rovnici $x = b$, rozpadne se na dvě části o obsazích daných integrály na pravé straně.)

4. **Integrál z konstantní funkce** je roven obsahu obdélníku, tedy
   $$(\mathcal{R}) \int_a^b k = k(b-a)$$
   (Integrál na levé straně je obsah pod grafem konstantní funkce – tedy obsah obdélníku o výšce k a šířce rovné délce intervalu (a,b), tedy $b-a$.)

12. Derivace integrálu s proměnnou horní mezí. Nechť f má na (a,b) Riemannův integrál a je v bodě $t_0 \in (a,b)$ spojitá. Ukážeme, že funkce
$$R : t \mapsto (\mathcal{R}) \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$
má v bodě t_0 derivaci rovnu $f(t_0)$.

13. Důkaz tvrzení 12. Chceme ukázat: $R'(t_0) = f(t_0)$ za předpokladu spojitosti funkce f v bodě t_0.

Vzpomeneme si na definici derivace
$$R'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{R(t_0+h) - R(t_0)}{h} \tag{2}$$
Důkaz provedeme nejdříve pro funkci f nabývající kladných hodnot a bude probíhat v následujících krocích:

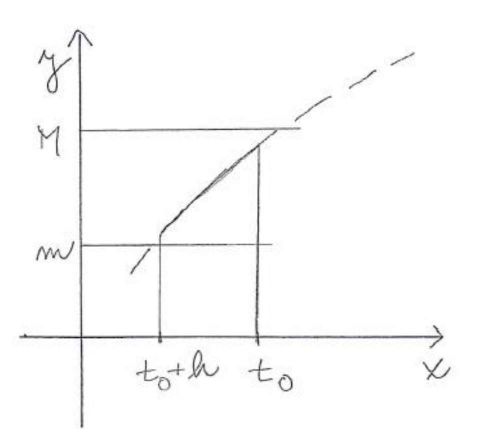
1. Uvědomíme si, že čitatel v (2) je pro $h > 0$ roven obsahu plochy po grafem funkce f na intervalu (t_0, t_0+h).
   Pro $h < 0$ je čitatel roven tomuto obsahu, ale s opačným znaménkem (obsah je kladný, čitatel je záporný).
   Použili jsme vlastnost aditivity vzhledem k integračnímu oboru z 11.

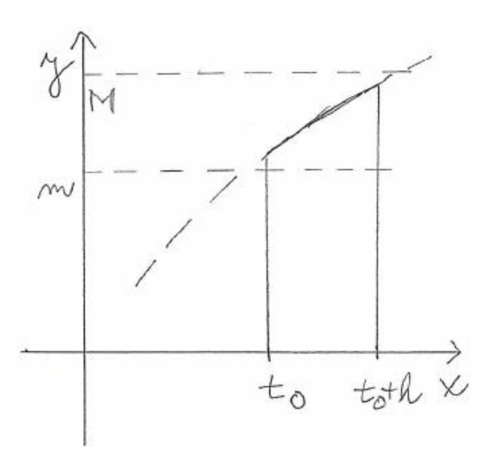
2. Interval mezi t_0 a t_0+h označíme I. Platí-li pro konstanty m, M

$$(\forall x \in I)(m \leq f(x) \leq M),$$

pak (odstavec 11, vlastnosti monotonie a plocha obdélníku) platí

$$\text{pro } h > 0 \qquad mh \leq \int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leq Mh$$
$$\text{pro } h < 0 \qquad m(-h) \leq -\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(-h)$$





Odtud dostaneme pro kladné i záporné h

$$m \leq \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x}{h} \leq M \tag{3}$$

3. Nyní použijeme spojitost funkce f v bodě t_0: víme, že pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ platí $f(x) \in (f(t_0)-\varepsilon, f(t_0)+\varepsilon)$. Můžeme tedy pro $h \in (t_0-\delta, t_0) \cup (t_0, t_0+\delta)$ dosadit do (3): $m = f(t_0)-\varepsilon$, $M = f(t_0)+\varepsilon$. Dostaneme

$$f(t_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x}{h} \leq f(t_0) + \varepsilon \tag{4}$$

Protože můžeme zvolit ε libovolně malé kladné, je limita výrazu $\frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x}{h}$ pro $t \to t_0$ rovna $f(x_0)$.
A proto platí $R'(t_0) = f(t_0)$.

Ukažme ještě, že tvrzení $R'(t_0) = f(t_0)$ platí i bez předpokladu kladnosti funkce f. Stačí zvolit konstantu c, která omezuje funkční hodnoty funkce f zdola a uvažovat funkci

$$g : x \mapsto f(x) - c,$$

která nabývá nezáporných hodnot a výše uvedené úvahy pro ni tedy platí.

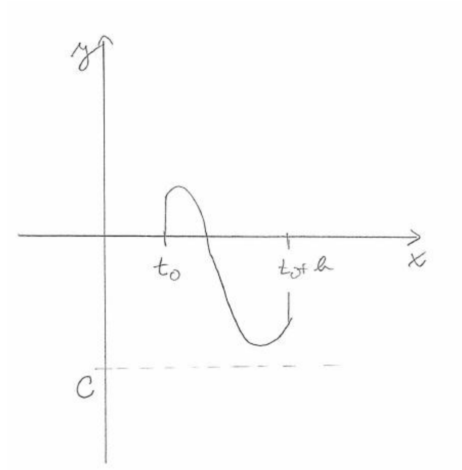
Vztah (4) pro funkci g

$$g(t_0) - \varepsilon \le \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} g(x)\,\mathrm{d}x}{h} \le g(t_0) + \varepsilon$$

přepíšeme pro funkci f

$$f(t_0)+c-\varepsilon \le \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x) + c\,\mathrm{d}x}{h} \le f(t_0)+c+\varepsilon$$

a upravíme



$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(x) + c\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_0}^{t_0+h} c\,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x + ch.$$

Dostáváme tedy

$$f(t_0) + c - \varepsilon \le \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x}{h} + c \le f(t_0) + c + \varepsilon$$

a po odečtení konstanty c od všech stran nerovnice

$$f(t_0) - \varepsilon \le \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x}{h} \le f(t_0) + \varepsilon$$

Závěrečná úvaha je stejná jako v případě funkce f nabývající nezáporných hodnot.

14. Spojitost a stejnoměrná spojitost. Funkce f je spojitá v bodě x_0, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu I, pokud platí

$$(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu* I, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

TODO: obrázek, který ukazuje, že funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$ je spojitá na $(0,1)$, ale není na $(0,1)$ stejnoměrně spojitá.
Důležitá vlastnost: je-li funkce spojitá na omezeném otevřeném intervalu a má v krajních bodech zevnitř intervalu konečné limity, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.
TODO: obrázek tuto vlastnost ilustrující

15. Riemannův integrál spojité funkce – existence. Hlavní myšlenka: použijeme stejnoměrnou spojitost, k $\varepsilon > 0$ vezmene dělení intervalu s délkami intervalů menšími než příslušné δ a ukážeme, že se pak DIS a HIS liší nejvýše o hodnotu, která je součinem ε a délky intervalu (na každém intervalu se m_i od M_i liší nejvýše o ε). Volbou dostatečně malého ε lze tedy získat dostatečně blízké hodnoty DIS a HIS, a proto se dolní a horní

Riemannovy integrály rovnají.
TODO: obrázek

16. Existence primitivní funkce ke spojité funkci. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $I = (a, b)$. Pak existuje k funkci f na intervalu I primitivní funkce.
Důkaz: Zvolme konstantu $c \in I$ a nechť $t \in I$ je proměnná. V odstavci 15 ukazujeme, že existuje Riemannův integrál funkce f na intervalu o krajních bodech c, t. Můžeme tedy definovat funkci R vztahem

$$R(t) = (\mathcal{R}) \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

v odstavci 12 ukazujeme, že funkce R má na I derivaci rovnou f. Funkce R je tedy primitivní funkce k funkci f na I.

17. Zobecněná primitivní funkce a Newtonův integrál. [JV,Newtonův integrál], definice 10.3.1 a 10.3.6.
Typickým příkladem funkce, která nemá primitivní funkci, ale má zobecněnou primitivní funkci, je po částech spojitá funkce jako v příkladu 9. Newtonův integrál v tomto případě počítáme přes jednotlivé intervaly spojitosti. Je-li f funkce z příkladu 9, pak

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}) \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x &= (\mathcal{N}) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathcal{N}) \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^3 2 - x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^2\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 1 + 0 = 1\end{aligned}$$

18. Poznámka. Všimněte si, že jsme v příkladu 9 v grafu funkce f nevyznačili hodnotu $f(1)$. Není to potřeba, protože se hodnota Riemannova integrálu nezmění při změně funkční hodnoty v jednom bodě – do plochy, jejíž obsah počítáme, jsme přidali či odebrali úsečku o nulovém obsahu.

Stejnou vlastnost má zobecněná primitivní funkce a Newtonův integrál. Stačí bod se změněnou funkční hodnotou zařadit mezi body, v nichž u zobecněné primitivní funkce požadujeme pouze spojitost a nikoliv derivaci.
Postupně můžeme změnit více hodnot – hodnota Riemannova a Newtonova integrálu se nezmění, pokud změníme funkční hodnotu v konečně mnoha bodech. Ze stejného důvodu nám nevadí, když integrovaná funkce není v konečně mnoha bodech definovaná.

19. Příklad. Zjisttěte, zda mají funkce f, g zobecněnou primitivní funkci na intervalu $(-1, 2)$ a zda má na tomto intervalu Newtonův integrál. Obě funkce nejsou definované v bodě nula, což nevadí, viz poznánka 18.

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

20. Řešení příkladu 19. Pokud existuje Newtonův integrál, pak je roven součtu určitých integrálů přes intervaly spojitosti:

$$(\mathcal{N}) \int_{-1}^2 \frac{1}{x} = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} + \int_0^2 \frac{1}{x} = [\log(-x)]_{-1}^0 + [\log x]_0^2 = -\infty + \infty,$$

což není definováno. Funkce f tedy nemá Newtonův integrál na intervalu $(-1,2)$. Nemá ani zobecněnou primitivní funkci, protože ta by v bodě 0 musela: být spojitá a mít limitu rovnu $-\infty$.

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}\right]_{0}^{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}.$$

Limity primitivní funkce na obou intervalech v dělícím bodě nula jsou konečné, proto má funkce g na intervalu $(-1,2)$ Newtonův integrál roven $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}-\frac{3}{2}$.
Kontrolní otázka: jak „slepíte“ zobecněnou primitivní funkci funkce g na intervalu $(-1,2)$ z primitivních fukcí funkce g na obou „menších“ intervalech?

21. Geometrický význam integrálů z příkladu 19. Načrtněte grafy funkcí z příkladu 19 a vysvětlete geometrický význam hodnot spočítaných v odstavci 20.

22. Příklad. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$f : x \mapsto \frac{1}{2+\cos x}.$$

23. Řešení příkladu 22. Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá, proto má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci a lze ji nalézt jako určitý integrál s proměnnou horní mezí, například jako

$$U : h \mapsto \int_0^h \frac{1}{2+\cos x}.$$

Pro $h \in (-\pi,\pi)$ najdeme $U(h)$ substitucí $t = tg\frac{x}{2}$. Vyjde nám

$$U(h) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{h}{2}}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

K získání předpisu pro U na $\mathbb{R}$ je potřeba si uvědomit:

1. Funkce U je spojitá na $\mathbb{R}$ (má na $\mathbb{R}$ konečnou derivaci).
2. Předpis (5) funkce U, zúžení U na interval $(-\pi,\pi)$, má v bodě π limitu zleva a v bodě $-\pi$ limitu zprava. Je ho tedy možné spojitě do těchto bodů rozšířit.
3. Funkce f je periodická s periodou 2π, proto se zúžení její primitivní funkce na intervaly $(k\pi,(k+1)\pi)$ pro celá k budou od zúžení na interval $(-\pi,\pi)$ lišit o konstantu.

TODO: Aplikací pravidel 1. až 3. dokážeme z grafu funkce U na intervalu $(-\pi,\pi)$ získat graf na $\mathbb{R}$.