Geometrické aplikace integrálů

Martina Šimůnková, 3. června 2016

Učební text k předmětu Matematická analýza pro studenty FP TUL

1. Obsah obrazce pod grafem funkce počítáme Riemannovým integrálem, který jsme definovali pro *omezenou* funkci f na *omezeném* intervalu $[a, b]$ a značíme ho $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. V tomto odstavci odvodíme vzorec pro výpočet Riemannova integrálu pro funkci f spojitou na $[a, b]$. Definujeme-li funkci R jako Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$R(x) = (\mathcal{R}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

víme z věty 10.2.36 z [JV], že R je primitivní funkcí funkce f na intervalu (a, b). Dále víme (lemma 9.1.2 v [JV]), že dvě primitivní funkce ke stejné funkci f na stejném intervalu se liší o konstantu. Můžeme tedy funkci R pomocí primitivní funkce F, kterou spočítáme, zapsat

$$(\forall x \in (a, b))(R(x) = F(x) + C). \tag{1}$$

K výpočtu hodnoty konstanty C použijeme lemma 10.2.39, konkrétně vztah (10.19), ze kterého plyne: $\lim_{x\to a^+} R(x) = 0$. Limitním přechodem ve vztahu (1) dostaneme:

$$0 = \lim_{x\to a^+} F(a) + C$$

a odtud pro $x \in (a, b)$

$$R(x) = F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

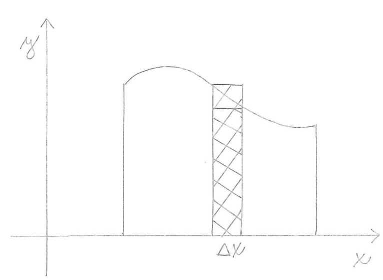
V případě primitivní funkce F spojité zprava v bodě a pak dostaneme

$$R(x) = F(x) - F(a)$$

a v případě primitivní funkce F spojité v bodě b zleva dostaneme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

2. V tomto a dalších odstavcích použijeme metody matematické analýzy Newtona a Leibnize (z přelomu 17. a 18. století), které později z matematické analýzy po zavedení ε-δ definice limity zmizely. Za zmínku stojí, že fyzikové tyto metody používali stále a do moderní matematiky se metody vrátily spolu s hyperreálnými čísly v nestandardní analýze. Na obrázku 1 je načrtnut obrazec pod křivkou, jeho část a její dolní a horní aproximace obdélníkem. Dolní aproximace je vyšrafovaná dvojitě a horní jen v jednom směru. Pro spojitou funkci a malé Δx je výška obou obdélníků přibližně rovna funkční hodnotě, plocha je



obr. 1

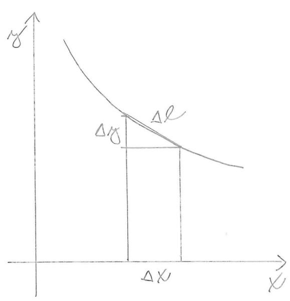
tedy přibližně rovna $f(x)\Delta x$. V limitě pro „nekonečně“ úzký proužek nahradíme symbol Δx symbolem $\mathrm{d}x$ a součet přes „nekonečně“ mnoho „nekonečně“ malých proužků zapíšeme pomocí „fajfky“ (znaku integrálu $\int$). Jinak řečeno, místo $\sum f(x)\Delta x$ budeme psát $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. V dalších odstavcích odvodíme vzorce pro geometrické veličiny ve tvaru $\sum f(x)\Delta x$ a pak je nahradíme veličinami ve tvaru $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Na obrázku 2 je oblouček křivky nahrazen úsečkou (sečnou), jejíž délku vypočteme pomocí Pythagorovy věty: $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Směrnici úsečky označíme k: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ a dosadíme $\Delta y = k\Delta x$ do Pythagorovy věty. Dostaneme: $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2$ a odtud

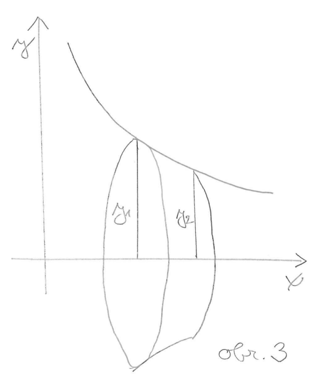
$$\Delta l = \Delta x\sqrt{1+k^2}.$$

Sečtením úseků dostaneme $l = \sum \Delta l\sqrt{1+k^2}$ a přechodem k integrálu pak vzorec pro délku oblouku mezi body $x = a$, $x = b$

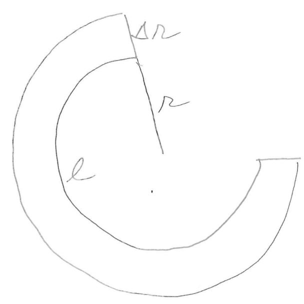
$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$



obr. 2



obr. 3



obr. 4

4. Odvodíme vzorec pro objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod grafem funkce. Těleso si rozdělíme naválečky o výšce Δx, poloměru podstavy $f(x)$ (na obrázku 3 jsou funkční hodnoty označeny y_1, y_2) a objemu $\pi(f(x))^2\Delta x$. Objem tělesa pak vypočteme jako součet $\sum \pi(f(x))^2\Delta x$ a pomocí integrálu

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

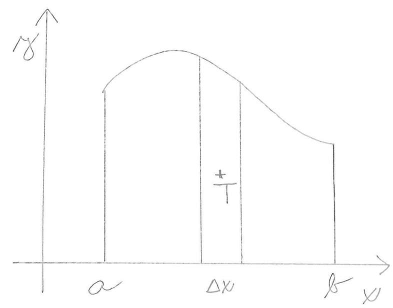
5. V odstavci 6 budeme počítat obsah plochy vzniklé rotací křivky okolo osy x, viz obrázek 3. Nahradíme-li oblouček křivky sečnou, stane se rotační plocha pláštěm komolého (uříznutého) kužele, jehož obsah vypočteme rozvinutím do roviny – vznikne část mezikruží. Na obrázku 4 je mezikruží s vnitřním poloměrem r, vnějším poloměrem $r+\Delta r$ a délkou oblouku vnitřní kružnice l. Plocha celého mezikruží je rovna: $\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2$, po úpravě $\pi(2r\Delta r + (\Delta r)^2)$. Plocha části mezikruží je úměrná délce oblouku vnitřní kružnice, kterou jsme označili l; můžeme ji tedy pomocí l vyjádřit $\frac{l}{2\pi r}\pi(2r\Delta r + (\Delta r)^2)$, po úpravě

$$l\Delta r\left(1+\frac{\Delta r}{2r}\right). \tag{2}$$

6. Spočítáme obsah pláště kužele, který vznikne rotací sečny (té, které délku jsme počítali v odstavci 3) kolem osy x. Použijeme (2), do něhož dosadíme $\Delta r = \sqrt{1+k^2}\Delta x$, $l = 2\pi f(x)$ a zlomek v závorce zanedbáme. Dostaneme $S = \sum 2\pi f(x)\sqrt{1+k^2}\Delta x$ a přechodem k integrálu dostaneme vzorec

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

7. Odvodíme vzorec pro polohu těžiště rovinného obrazce. Použijeme veličinu, které se říká statický moment. Houpali jste se někdy s malým dítětem na dvouramenné houpačce? Aby houpání mohlo fungovat, musíte si sednout v takové vzdálenosti od středu, v němž je houpačka podepřená, aby součin této vzdálenosti a vaší váhy byl stejný jako součin váhy a vzdálenosti dítěte. Tomuto součinu se říká statický moment. Na obrázku 5 je obrazec a jeho proužek s vyznačeným těžištěm, které má polohu $T = [x, \frac{1}{2}f(x)]$. Místo váhy budeme uvažovat plochu $f(x)\Delta x$ (to odpovídá případu s plošnou hustotou rovnou jedné). Statický moment proužku vzhledem k ose x je $S_x = \frac{1}{2}f(x)\,f(x)\Delta x$ a vzhledem k ose y je $S_y = x\,f(x)\Delta x$. Odtud dostaneme sečtením přes proužky a přechodem k integrálu



obr. 5

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x, \qquad S_y = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště $T = [x_T, y_T]$ obrazce je takový bod, ve kterém má hmota celého obrazce M do něj koncentrovaná stejné statické momenty jako celý obrazec. Tedy $S_y = Mx_T$, $S_x = My_T$. Polohu těžiště odtud vypočteme

$$T = \left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right].$$

Všimněte si, že x-ovou souřadnici těžiště vypočteme z momentu vzhledem k ose y a naopak. Je to proto, že vzdálenost bodu $[x, y]$ od osy y je $|x|$ a x je orientovaná vzdálenost od osy y (orientovaná proto, že ze znaménka lze určit, na které straně od osy y bod leží). Hmotu obrazce opět vypočteme jako obsah obrazce, tedy $M = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.