Důkaz L'Hospitalova pravidla

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
7. března 2016

Znění L'Hospitalova pravidla i s důkazem najdete v [JV], 5.2.28. My zde z tohoto důkazu „vytáhneme" a předvedeme hlavní myšlenku.

Použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě, která říká, že
za předpokladů:
$I = (a, b)$ je neprázdný omezený interval, funkce f, g jsou spojité na I, mají na I vlastní (tj. konečnou) derivaci a derivace g' funkce g je navíc na I nenulová; dále jsou funkce f, g spojité zprava v bodě a spojité zleva v bodě b
platí:
existuje číslo $c \in (a, b)$ splňující

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{1}$$

Ve formulaci Cauchyovy věty o střední hodnotě je $a < b$. My v dalším textu tuto podmínku pomineme – všimněte si, že význam (1) se záměnou a a b nezmění.

Limitní bod je v [JV] označen a, tedy stejně jako jeden z krajních bodů intervalu v Cauchyově větě. My proto limitní bod přejmenujeme na x_0.

Naším cílem je ukázat, že pro pevně zvolenou toleranci $\varepsilon > 0$ je možné zvolit body a, b dostatečně blízko bodu x_0 tak, že se podíl $f(b)/g(b)$ bude lišit od $f'(c)/g'(c)$ méně než je zvolená tolerance.

V případě „0/0" upravíme pravou stranu (1) na

$$\frac{f(b)}{g(b)} \, \frac{1 - f(a)/f(b)}{1 - g(a)/g(b)}$$

a k bodu b zvolíme bod a dostatečně blízko bodu x_0, aby hodnoty $f(a)$, $g(a)$ byly dostatečně blízké nule a tedy druhý zlomek nabýval hodnotu blízkou jedné.

V případě „x/nekonečno" upravíme postupně pravou stranu (1) na

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b)} \, \frac{1}{1 - g(a)/g(b)} = \frac{f(b)}{g(b)} \, \frac{1}{1 - g(a)/g(b)} - \frac{f(a)}{g(b)} \, \frac{1}{1 - g(a)/g(b)}$$

a k bodu a zvolíme okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body b v tomto okolí je hodnota $g(b)$ tak velká, že jsou oba podíly $g(a)/g(b)$ i $f(a)/g(b)$ dostatečně blízké nule.

V obou případech – „0/0" i „x/nekonečno" dostaneme, že hodnota výrazu $f(b)/g(b)$ je v okolí bodu x_0 v rámci tolerance dané číslem ε přibližně rovna výrazům v (1).