Derivace Taylorova polynomu

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
13. března 2017

1. „Posunutý“ polynom. Každý polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1}$$

je možné vyjádřit ve tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k.$$

Koeficienty b_k vypočteme následovně: do (1) dosadíme za x výraz $t + x_0$ a použijeme binomickou větu na úpravu $(t + x_0)^k$. Dostaneme polynom, jehož koeficienty označíme b_k a do tohoto polynomu dosadíme zpětně za t výraz $x - x_0$.

2. Derivace „posunutého“ polynomu. Vypočteme derivace polynomu P v bodě x_0

$$\begin{aligned}
P(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n \\
P(x_0) &= b_0 \\
P'(x) &= b_1 + 2b_2(x - x_0) + \cdots + nb_n(x - x_0)^{n-1} \\
P'(x_0) &= b_1 \\
P''(x) &= 2b_2 + \cdots + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2} \\
P''(x_0) &= 2b_2
\end{aligned}$$

Hodnota k-té derivace v bodě x_0 vyjde $P^{(k)}(x_0) = k!b_k$
Odtud plyne, že podmínka $f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0)$ je ekvivalentní s podmínkou $f^{(k)}(x_0) = k!b_k$ a ta je ekvivalentní s podmínkou $b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

3. Lemma. *Nechť P je polynom stupně nejvýše n. Pak je P Taylorovým polynomem funkce f se středem v bodě x_0 právě když funkční hodnota a všechny derivace až do řádu n v bodě x_0 jsou stejné pro polynom P a funkci f – formálně zapsáno*

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad P''(x_0) = f''(x_0), \ \ldots \ , P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

a ještě o něco formálněji

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \leq n.$$

Důkaz. Polynom P zapíšeme ve tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n.$$

Všimněte si, že stupeň P je nejvýše n – menší než n je v případě $b_n = 0$. Dále si uvědomte, že každý polynom stupně nejvýše n můžeme takto vyjádřit (viz výše). K dokončení důkazu stačí použít odstavec **2**.

4. Věta. *Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ konečnou derivaci n-tého řádu $f^{(n)}(x_0)$. Nechť P je polynom stupně nejvýše n. Pak je P Taylorovým polynomem funkce f se středem v bodě x_0 právě když platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Důkaz provedeme pro $n = 3$.

„$\Rightarrow$“ Nechť je P Taylorovým polynomem – označíme ho T_3. Počítejme limitu čitatele $f(x) - T_3(x)$ a jmenovatele $(x - x_0)^3$ v bodě x_0. Funkce f má v bodě x_0 konečnou derivaci, proto je v bodě x_0 spojitá a proto je limita $f(x)$ v bodě x_0 rovna funkční hodnotě $f(x_0)$. Polynom T_3 je spojitý na $\mathbb{R}$, proto je limita $T_3(x)$ v bodě x_0 rovna funkční hodnotě $T_3(x_0)$. V odstavci **2** jsme ukázali, že pro Taylorův polynom T_3 platí $T_3(x_0) = f(x_0)$, a tudíž je limita čitatele rovna nule. Limita jmenovatele je též rovna nule, použitím L'Hospitalova pravidla dostaneme limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_3'(x)}{3(x - x_0)^2}.$$

Z existence a konečnosti druhé derivace funkce f v bodě x_0 plyne spojitost funkce f' v bodě x_0 a odtud a z $T_3'(x_0) = f'(x_0)$ plyne, že limita čitatele i jmenovatele je opět rovna nule. Aplikací L'Hospitalova pravidla dostaneme limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - T_3''(x)}{6(x - x_0)}.$$

Nyní dosadíme

$$T_3''(x) = f''(x_0) + f^{(3)}(x_0)(x - x_0)$$

a dostaneme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f^{(3)}(x_0)(x - x_0)}{6(x - x_0)}$$

a po úpravě

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{6} \left(\frac{f''(x) - f''(x_0)}{(x - x_0)} - f^{(3)}(x_0) \right).$$

Tato limita je rovna nule – srovnejte s definicí derivace

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{(x - x_0)} = f^{(3)}(x_0).$$

„$\Leftarrow$“ Nechť je P polynom stupně nejvýše třetího. Pak je $Q = P - T_3$ také polynom nejvýše třetího stupně. Do předpokladu věty

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^3} = 0$$

dosaďme $P = T_3 + Q$. Dostaneme

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - T_3}{(x - x_0)^3} - \frac{Q(x)}{(x - x_0)^3} \right) = 0.$$

Protože limita z prvního zlomku je rovna nule (viz výše), dostáváme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{(x - x_0)^3} = 0. \tag{2}$$

Polynom Q nyní vyjádříme v „posunutém“ tvaru

$$Q(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 \tag{3}$$

a ukážeme postupně, že z (2) plyne

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0. \tag{4}$$

Odtud plyne, že Q je nulový polynom a tedy $P = T_3$, což chceme dokázat.
Pusťme se do dokazování (4). Použijeme (2) a větu o limitě součinu

$$\lim_{x \to x_0} Q(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{(x - x_0)^3}(x - x_0)^3 = 0.$$

Odtud plyne $b_0 = 0$.
Dosaďme $b_0 = 0$ do (3)

$$Q(x) = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3,$$

a to dosaďme do (2), dostaneme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} = 0$$

a po úpravě

$$\lim_{x \to x_0} \frac{b_1 + b_2(x - x_0) + b_3(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Věta o limitě součinu nám dá

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{b_1 + b_2(x - x_0) + b_3(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2}(x - x_0)^2,$$

tedy $b_1 = 0$. To nám dále umožní upravit

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{b_2(x - x_0) + b_3(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{b_2 + b_3(x - x_0)}{(x - x_0)}$$

a věta o limitě součinu nám zase dá $b_2 = 0$ a konečně $b_3 = 0$.