Zbytek Taylorova polynomu

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
14. března 2017

1. Zbytek Taylorova polynomu. Máme funkci f, bod $x_0 \in \mathbb{R}$. Symbolem T_n označíme Taylorův polynom funkce f se středem v bodě x_0 stupně n. Symbolem R_n zbytek Taylorova polynomu T_n, což je rozdíl funkce f a jejího Taylorova polynomu T_n. Pro $n = 0$ je

$$R_0 : x \mapsto f(x) - f(x_0).$$

Pro $n = 1$

$$R_1 : x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)\,,$$

a pro $n = 2$

$$R_2 : x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) - \tfrac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2\,.$$

2. Hodnoty zbytku Taylorova polynomu v jeho středu. Všimněte si, že hodnota zbytku v bodě x_0 (tedy ve středu Taylorova polynomu) je rovna nule

$$\begin{aligned} R_0(x_0) &= f(x_0) - f(x_0) = 0 \\ R_1(x_0) &= f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x_0 - x_0) = 0 \\ R_2(x_0) &= f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x_0 - x_0) - \tfrac{1}{2} f''(x_0)\,(x_0 - x_0)^2\,. \end{aligned}$$

Totéž platí i pro polynomy vyššího řádu. Na grafech Taylorových polynomů se to projeví tím, že grafy procházejí bodem $[x_0, f(x_0)]$ (všimněte si, že $R_n(x_0) = 0$ je totéž jako $f(x_0) = T_n(x_0)$).

3. Derivace zbytku Taylorova polynomu. Vypočteme derivace zbytku Taylorova polynomu třetího řádu

$$\begin{aligned} R_3(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) - \tfrac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 - \tfrac{1}{6} f^{(3)}(x_0)\,(x - x_0)^3 \\ R_3'(x) &= f'(x) - 0 - f'(x_0)\,(1 - 0) - \tfrac{2}{2} f''(x_0)\,(x - x_0) - \tfrac{3}{6} f^{(3)}(x_0)\,(x - x_0)^2 \\ R_3''(x) &= f''(x) - 0 - 0 - \tfrac{2}{2} f''(x_0) - \tfrac{6}{6} f^{(3)}(x_0)\,(x - x_0) \\ R_3^{(3)}(x) &= f^{(3)}(x) - 0 - 0 - 0 - \tfrac{6}{6} f^{(3)}(x_0) \\ R_3^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x) - 0 - 0 - 0 - 0 \end{aligned}$$

Po úpravě vyjde

$$\begin{aligned} R_3'(x) &= f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)\,(x - x_0) - \tfrac{1}{2} f^{(3)}(x_0)\,(x - x_0)^2 \\ R_3''(x) &= f''(x) - f''(x_0) - f^{(3)}(x_0)\,(x - x_0) \\ R_3^{(3)}(x) &= f^{(3)}(x) - f^{(3)}(x_0) \\ R_3^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x) \end{aligned}$$

Dosazením x_0 za x dostaneme

$$0 = R_3'(x_0) = R_3''(x_0) = R_3^{(3)}(x_0). \tag{1}$$

Obecně platí $R_n^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k \leq n$.
Vztah $R_n'(x_0) = 0$ můžeme přepsat jako $f'(x_0) = T_n'(x_0)$, což se na grafu projeví společnou tečnou ke grafu funkce f a polynomu T_n v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
Podobně vztah $R_n''(x_0) = 0$ můžeme přepsat jako $f''(x_0) = T_n''(x_0)$ a ten se na grafu projeví společnou oskulační kružnicí ke grafu funkce f a polynomu T_n v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
4. Poznámka. Až po sepsání tohoto textu a textu *Derivace Taylorova polynomu* jsem si všimla, že (1) je odvozeno v textu *Derivace Taylorova polynomu* v lemmatu v bodě **3**.