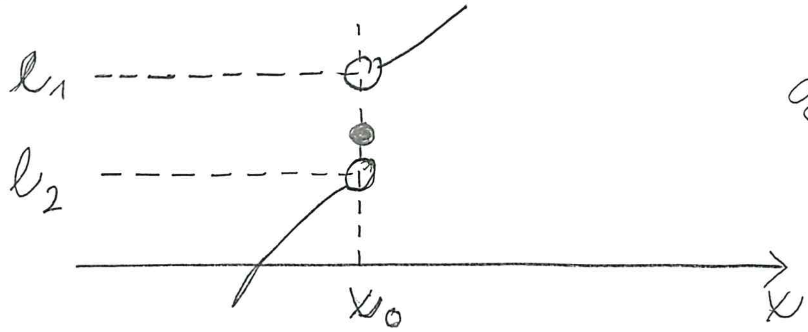
JEDNOSTRANNÉ LIMITY MONOTONNÍ FUNKCE



graf neklesající funkce

$l_1 = \inf M_1$, kde $M_1 = \{f(x) : x > x_0\}$

$l_2 = \sup M_2$, kde $M_2 = \{f(x) : x < x_0\}$

Z vlastností infima plyne

1) $x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq l_1$

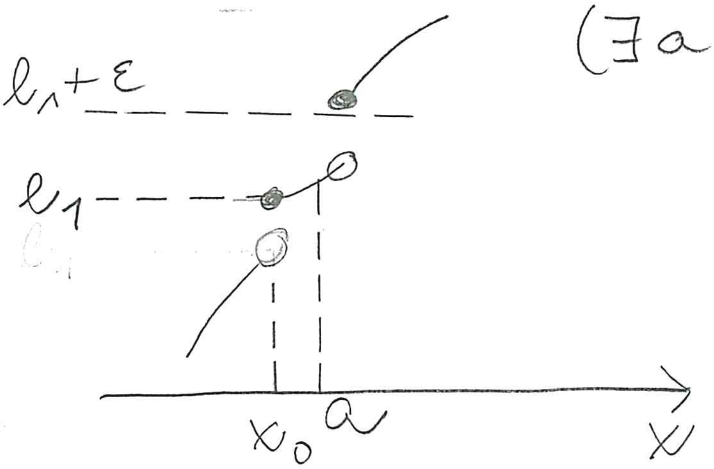
tedy i $x > x_0 \Rightarrow f(x) > l_1 - \varepsilon$

2) $\varepsilon > 0 \Rightarrow l_1 + \varepsilon$ není dolní závora M_1

tedy

$(\exists a > x_0)\ \neg(f(a) \geq l_1 + \varepsilon)$

$f(a) < l_1 + \varepsilon$



Z monotonie plyne

$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

tedy i

$x < a \Rightarrow f(x) < l_1 + \varepsilon$

Závěr: $x \in (x_0, a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(l_1)$

Ukázali jsme, že pro funkci f neklesající v okolí bodu x_0 platí:

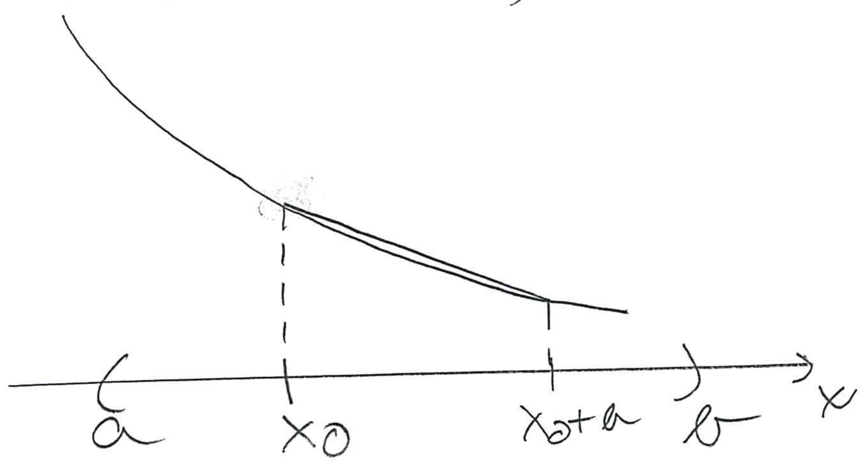
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a > x_0)(\forall x)(x \in (x_0, a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(l_1))$

EXISTENCE JEDNOSTRANNÝCH DERIVACÍ KONVEXNÍ FUNKCE

f je definovaná a konvexní na $I = (a, b)$, $x_0 \in I$

funkce $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ je neklesající

na $(a - x_0, b - x_0)$



Odtud plyne existence jednostranných derivací

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

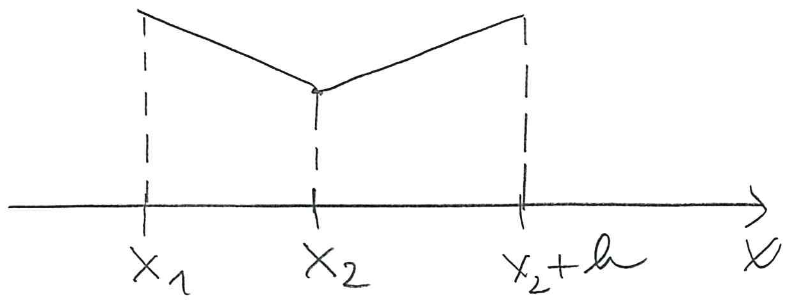
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

jiný zápis

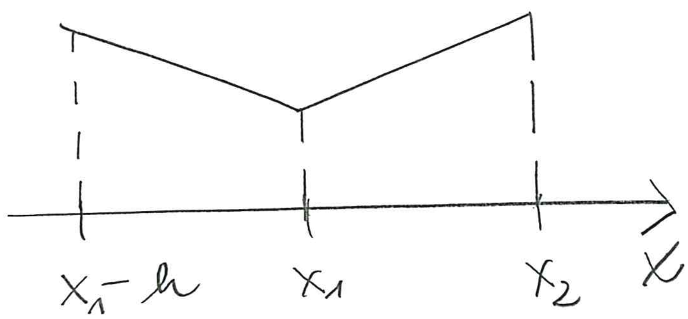
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

$f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ mohou být nevlastní

MONOTONIE JEDNOSTRANNÝCH DERIVACÍ KONVEXNÍ FUNKCE



$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_+(x_2)$$



$$f'_-(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Kromě monotonie odtud plyne i konečnost derivací $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ pro $x_0 \in (a,b)$.

Plyne to z konečnosti $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$