

Řady

Text pro studenty FP TUL

Martina Šimůnková

3. dubna 2017

Následující tři příklady ukazují úskalí při manipulaci s nekonečnými součty.

1. Uvažujme řadu

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \quad (1)$$

a vydělme ji člen po členu dvěma

$$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \dots \quad (2)$$

Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne (odečtením (2) od (1))

$$\frac{s_1}{2} = s_1 - \frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots \quad (3)$$

A odtud dostaneme odečtením řady (2) od řady (3)

$$0 = \frac{s_1}{2} - \frac{s_1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots,$$

a tedy součet kladných čísel je roven nule.

2. Uvažujme řadu

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s_2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s_2}{2} = s_2 + \frac{s_2}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy. Proto platí $s_2 = \frac{3s_2}{2}$.

3. Uvažujme geometrickou řadu

$$s_3 = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \dots$$

a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s_3}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} + \dots$$

Vidíme, že platí $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$, odkud dostaneme $s_3 = -7$.