

**Požadavky k ústní zkoušce z předmětu AN2E  
8. června 2017**

1. Zformulujte L'Hospitalovo pravidlo a předved'te hlavní myšlenky jeho důkazu. Na výpočet limity jakého typu je možné L'Hospitalovo pravidlo použít?
2. Jak je definován Taylorův polynom? Vysvětlete aproximační vlastnosti Taylorova polynomu. Používáme ho k lokální nebo ke globální aproximaci?
3. Ukažte, že pro Taylorův polynom  $T_{f,x_0,4}$  (funkce  $f$  v bodě  $x_0$  čtvrtého stupně) platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{f,x_0,4}(x)}{(x - x_0)^4} = 0$$

a pro žádný další polynom stupně nejvýše čtvrtého tento vztah neplatí.

Jak tento vztah použijete k výpočtu limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^4}?$$

4. Odvod'te vztah pro zbytek Taylorova polynomu druhého stupně funkce  $f$  se středem v bodě  $x_0$

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(c)(x - x_0)^3$$

Jak tento vztah použijete k odhadu chyby aproximace?

5. Najděte horní odhad relativní chyby, které se dopustíte aproximací výrazu  $\sin \varphi$  výrazem  $\varphi$ . Přitom  $\varphi$  je v radiánech a dosazujete za něj hodnoty odpovídající úhlu mezi  $-5$  a  $5$  stupni. Výsledek uveďte v procentech.
6. Vysvětlete rozdíl mezi lineární a konvexní kombinací geometrických vektorů v rovině. Jaký útvar vyplní všechny konvexní kombinace dvou zadaných geometrických vektorů? Totéž pro tři vektory. Jaká konvexní kombinace polohových vektorů vrcholů trojúhelníku je polohovým vektorem těžiště trojúhelníku?
7. Definujte konvexní funkci na otevřeném intervalu. Uveďte příklad nespojitě konvexní funkce na intervalu (návod: nemůže to být otevřený interval).
8. Ukažte, že pro všechna reálná čísla  $a < b < c$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  platí

$$B \leq \frac{c-b}{c-a} A + \frac{b-a}{c-a} C \iff \frac{C-A}{c-a} \leq \frac{C-B}{c-b}$$

a vysvětlete grafický význam nerovností (návod: na pravé straně levé nerovnosti je konvexní kombinace čísel  $A$ ,  $C$ ; zlomky v pravé nerovnosti odpovídají směrnici).

9. Co je to nekonečná řada? Co to znamená, že je řada konvergentní, že má řada součet a jak je součet definován?
10. Definujte konečnou a nekonečnou geometrickou řadu a odvoďte vztah pro její součet. Pro jakou hodnotu kvocientu je geometrická řada konvergentní a pro jakou hodnotu má součet?
11. Vysvětlete, proč má každá řada s nezápornými členy součet. Uveďte příklad řady, která součet nemá. Uveďte kritéria konvergence řady s nezápornými členy.
12. Zformulujte a dokažte srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy. Vypočítejte součet řady  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$  a ukažte, že řady  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  jsou konvergentní.
13. Zformulujte a dokažte limitní srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy. Ukažte, že řada  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$  je pro  $m = 2$  konvergentní a pro  $m = 1$  divergentní (jak řadu pro  $m = 1$  nazýváme?). Použijte limitní srovnávací kritérium ke zjištění konvergence řad pro  $m \in (0, 1)$  a  $m > 2$ .
14. Zformulujte a dokažte podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (návod: použijte srovnávací kritérium s geometrickou řadou).
15. Zformulujte a dokažte limitní podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (návod: použijte podílové kritérium).
16. Vysvětlete rozdíl mezi absolutní a neabsolutní konvergencí. Ukažte, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

konverguje, ale nekonverguje absolutně (říkáme, že konverguje neabsolutně).

17. Vysvětlete pojem primitivní funkce. Proč hledáme primitivní funkce na intervalu a ne na obecnější množině – co je špatně na vzorci  $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$ ?
18. Vysvětlete integraci substitucí. Napište, který integrál převádíme na který a v jakém případě potřebujeme k substituční funkci inverzní funkci. Uveďte na příkladech.
19. Co je to racionální funkce a jak ji integrujeme?
20. Definujte Riemannův integrál. Na jaké množině a pro jaké funkce ho definujeme? (Na omezeném intervalu a pro omezenou funkci.) Co jsou dolní a horní integrální součty a jaký mají vztah k obsahu obrazce pod grafem funkce? Co je to dolní a horní Riemannův integrál? Vysvětlete, čemu se rovná dolní a horní Riemannův integrál Dirichletovy funkce.

21. Existenci Riemannova integrálu s proměnnou horní mezí jsme nestihli, ale stihli jsme ukázat, čemu se rovná derivace tohoto integrálu podle horní meze. Ukažte, že se rovná funkční hodnotě integrované funkce.
22. Odvoďte vzorec pro obsah plochy mezi grafy dvou funkcí  $O = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ .
23. Jak byste přibližně spočítali obvod kruhu bez znalosti vzorce, ale se znalostí obvodu trojúhelníku (případně mnohoúhelníku)? Jak byste definovali délku oblouku křivky? Odvoďte vzorec pro délku oblouku křivky  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .