Písemná část zkoušky z předmětu AN2E
7. června 2017

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

2. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2^x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2^{-x}}$$

3. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^3+x+5)}{\log(x^2+1)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}$$

4. Vypočtěte Taylorův polynom funkce f stupně tři v bodě nula a použijte ho k výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

$$f : x \mapsto \operatorname{tg} x - \sin x$$

5. Vypočtěte Taylorův polynom funkce f stupně dva v bodě nula a použijte ho k výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

$$f : x \mapsto 1 - \sqrt{\cos x}$$

6. Vypočtěte Taylorův polynom funkce f stupně čtyři v bodě nula a použijte ho k výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

$$f : x \mapsto 1 - \cos(x^2)$$

7. Ukažte, že polynom P je Taylorovým polynomem funkce f stupně jedna v bodě nula a vypočtěte horní odhad chyby, které se pro $x \in (-0.2, 0.2)$ dopustíte, když nahradíte hodnotu $f(x)$ hodnotou $P(x)$.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{1-2x} \qquad P : x \mapsto 1 - \tfrac{2}{3}x$$

8. Jaké relativní chyby se dopustíte nahrazením hodnoty $\sin x$ hodnotou x pro $x \in (-0.1, 0.1)$?

9. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f konvexní.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

10. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f konvexní.

$$f : x \mapsto \sqrt{x}\exp(x)$$

11. Napište definici inflexního bodu a nalezněte inflexní body funkce f.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

12. Napište definici inflexního bodu a nalezněte inflexní body funkce f.

$$f : x \mapsto \sqrt{x}\exp(x)$$

13. Číslo mající desetinný periodický rozvoj $0.\overline{1279}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem. Podobně pro dvojkový rozvoj $0.\overline{10100}$.
Obě úlohy řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou dvou či deseti.

14. Které z následujících posloupností jsou Cauchyovské?

$$\left\{\frac{\sqrt{n^3}}{n+1}\right\} \qquad \left\{\frac{\sqrt{n^3}}{n^2+1}\right\} \qquad \left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right\}$$

15. Sečtěte konečnou řadu

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2+2k}$$

a vypočtěte součet nekonečné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2+2k}$$

16. Zdůvodněte, že následující řady mají součet a zjistěte, které z nich mají konečný součet.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$$

17. Ze vztahu proměnných x, t vyjádřete x a načrtněte graf závislosti těchto proměnných.

$$t = x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

18. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.

$$f : x \mapsto (x^2+1)\exp(x) \qquad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

19. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.

$$f : x \mapsto (x^2-2)\sin x \qquad g : x \mapsto \frac{6}{1-\sqrt{x}}$$

20. Vypočtěte

$$\int_0^{3\pi} \frac{1}{4+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

21. Načrtněte graf funkce f a pro $x \in (0,2)$ vypočtěte Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0,2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & t \in (0,1) \\ t & t \in (1,2) \end{cases}$$

22. Graf funkce f je sjednocením úseček AB, CD (krajní body do grafu funkce nepatří). Načrtněte graf funkce f a prostředky elementární geometrie vypočtěte pro $x \in (0,2)$ Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0,2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$A = [0,2] \quad B = [1,0] \quad C = [1,-1] \quad D = [2,1]$$

23. Vypočtěte obsah části roviny dané nerovnostmi. Nakreslete obrázek, obsah odhadněte a porovnejte odhad s vypočtenou hodnotou.

$$y \geq x^2 - 3x + 1 \qquad y \leq 2x + 1$$

24. Proveďte substituci $t = 2x - \sqrt{4x^2 - 1}$ v neurčitém integrálu, integrál nepočítejte, pouze integrovanou funkci upravte na podíl dvou polynomů.

$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{4x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x$$