Písemná část zkoušky z předmětu AN2E
23. května 2018

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru
$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{arctg}(2-\sqrt{x})\sin(x^2-x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$
2. Určete definiční obor a obor hodnot funkce
$$f : x \mapsto \arccos\sqrt{1+x+x^2}$$
3. Odvoďte derivaci funkce arccos.
4. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem y.
$$y = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$$
5. Ukažte, že limita funkce $x \mapsto 2^{-x}$ pro $x \to +\infty$ je rovna nule – napište příslušnou definici limity a ukažte, že jí funkce vyhovuje.
6. Ukažte, že limita funkce $x \mapsto \log x$ pro $x \to +\infty$ je rovna $+\infty$ – napište příslušnou definici limity a ukažte, že jí funkce vyhovuje.
7. Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru
$$f : x \mapsto \frac{x\log x}{x-\sqrt{2-x}}$$

8. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log x \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

9. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2^x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2^{-x}}$$

10. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^3+x+5)}{\log(x^2+1)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}$$

11. Vypočtěte Taylorův polynom funkce f stupně tři v bodě nula a použijte ho k výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

$$f : x \mapsto \operatorname{tg} x - \sin x$$

12. Vypočtěte Taylorův polynom funkce f stupně dva v bodě nula a použijte ho k výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

$$f : x \mapsto 1 - \sqrt{\cos x}$$

13. Vypočtěte Taylorův polynom funkce f stupně čtyři v bodě nula a použijte ho k výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

$$f : x \mapsto 1 - \cos(x^2)$$

14. Ukažte, že polynom P je Taylorovým polynomem funkce f stupně jedna v bodě nula a vypočtěte horní odhad chyby, které se pro $x \in (-0.2, 0.2)$ dopustíte, když nahradíte hodnotu $f(x)$ hodnotou $P(x)$.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{1-2x} \qquad P : x \mapsto 1 - \tfrac{2}{3}x$$

15. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f konvexní.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

16. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je f konvexní.

$$f : x \mapsto \sqrt{x}\exp(x)$$

17. Napište definici inflexního bodu a nalezněte inflexní body funkce f a napište rovnici tečny v těchto bodech.

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

18. Napište definici inflexního bodu a nalezněte inflexní body funkce f a napište rovnici tečny v těchto bodech.
$$f : x \mapsto \sqrt{x}\exp(x)$$

19. Sečtěte konečnou řadu
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2 + 2k}$$
a vypočtěte součet nekonečné řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 + 2k}$$

20. Zdůvodněte, že následující řady mají součet a zjistěte, které z nich mají konečný součet.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}$$

21. Zdůvodněte, že následující řady mají součet a zjistěte, které z nich mají konečný součet.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

22. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.
$$f : x \mapsto (x^2 + 1)\exp(x) \qquad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

23. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.
$$f : x \mapsto (x^2 - 2)\sin x \qquad g : x \mapsto \frac{6}{1 - \sqrt{x}}$$

24. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.
$$f : x \mapsto x^5 \log\sqrt{x} \qquad g : x \mapsto \frac{\exp(2x)}{\exp(2x) + \exp(x) - 6}$$

25. Načrtněte graf funkce f a pro $x \in (0, 2)$ vypočtěte Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0, 2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?
$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & t \in (0, 1) \\ t & t \in (1, 2) \end{cases}$$

26. Graf funkce f je sjednocením úseček AB, CD (krajní body do grafu funkce nepatří). Načrtněte graf funkce f a prostředky elementární geometrie vypočtěte pro $x \in (0,2)$ Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0,2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?
$$A = [0,2] \quad B = [2,-1] \quad C = [2,0] \quad D = [3,1]$$

27. Vypočtěte obsah a polohu těžiště rovinného obrazce daného nerovnostmi. Nakreslete obrázek, počítané veličiny odhadněte a porovnejte odhad s vypočtenou hodnotou.
$$y \geq x^2 - 3x + 1 \qquad y \leq 2x + 1$$

28. Vypočtěte vzdálenost těžiště půlkruhu o poloměru R od středu příslušného kruhu (středu průměru půlkruhu).

29. Proveďte substituci $t = 2x - \sqrt{4x^2 - 1}$ v neurčitém integrálu. Integrál nepočítejte, pouze integrovanou funkci upravte na podíl dvou polynomů. Napište obory pro obě proměnné x, t.
$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{4x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x$$

30. Převeďte vhodnou substitucí integrál na integrál racionální funkce. Integrál nepočítejte, pouze integrovanou funkci upravte na podíl dvou polynomů.
$$\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x}{x-2}}\,\mathrm{d}x$$

31. Vypočtěte Newtonovy určité integrály a uveďte, zda Riemannovy integrály vyjdou stejně.
$$\int_0^1 x \log x\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$$

32. Vypočtěte Newtonovy určité integrály a uveďte, zda Riemannovy integrály vyjdou stejně.
$$\int_0^{\pi} \sin^7 x\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \log \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$