Aproximace funkcí

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
7. března 2016

1. Úvod. Ze dvou následujících odlišných koncepcí aproximace se v tomto textu budeme věnovat jen druhé z nich.

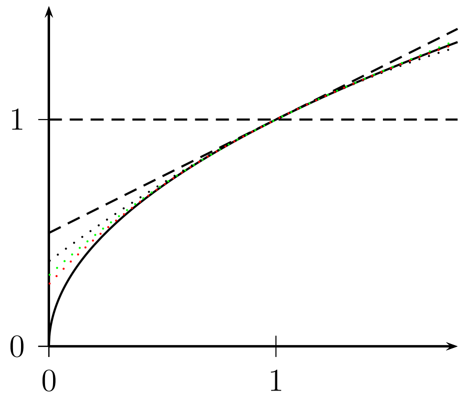
a. **Aproximace funkce na intervalu** je popsána v [JV], články 7.4.4 (a odstavec nad), 7.4.5, 7.4.8, 7.4.10 a příslušný polynom nazýváme Lagrangeův.

b. **Aproximace funkce v okolí bodu.** Příslušný polynom nazýváme Taylorův, speciálně Maclaurinův, to pokud aproximujeme v bodě 0.

2. Příklad. Na obrázku je graf funkce

$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$

spolu s grafy jejích Taylorových polynomů v bodě 1 stupně 0 a 1 (čárkovaně), 2 (tečkovaně), 3 (tečkovaně zeleně) a 4 (tečkovaně červeně). Všimněte si, že aproximace se zlepšuje se zvyšujícím se stupněm polynomu.



Odvodíme rovnice těchto polynomů. Definice Taylorova polynomu je v [JV] 7.4.2, pro nás bude z této definice podstatná poznámka v jejím závěru (o rovnosti derivací funkce a jejího Taylorova polynomu v bodě $x_0 = 1$, ve kterém funkci aproximujeme) a příklad 7.4.1, ve kterém jsou zkonstruovány polynomy p_k:

$$p_0(x) = 1 \qquad p_1(x) = x - 1 \qquad p_2(x) = (x-1)^2/2 \qquad p_3(x) = (x-1)^3/6$$

Tyto polynomy splňují:

k	$p_k(1)$	$p'_k(1)$	$p''_k(1)$	$p^{(3)}_k(1)$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1

Rozmyslete si, že polynom p sestavený jako lineární kombinace

$$p = \alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3$$

má hodnoty derivací

$p(1)$	$p'(1)$	$p''(1)$	$p^{(3)}(1)$
α	β	γ	δ

Výpočtem zjistíme, že zkoumaná funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ má v bodě 1 funkční hodnotu a hodnoty derivací

$f(1)$	$f'(1)$	$f''(1)$	$f^{(3)}(1)$	$f^{(4)}(1)$
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{16}$

Ve shodě s poznámkou 7.4.3 v [JV] budeme Taylorův polynom funkce f se středem v bodě x_0 stupně n značit $T_{f,x_0,n}$ a když nebude hrozit nedorozumění, tak T_n či T. Pomocí výše uvedených derivací vyjádříme Taylorovy polynomy:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1p_0(x) = 1\\
T_1(x) &= 1p_0(x) + \tfrac{1}{2}p_1(x) = 1 + \tfrac{1}{2}(x-1)\\
T_2(x) &= 1p_0(x) + \tfrac{1}{2}p_1(x) - \tfrac{1}{4}p_2(x) = 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2\\
T_3(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3\\
T_4(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3 - \tfrac{5}{128}(x-1)^4
\end{aligned}$$

3. Zbytek Taylorova polynomu je definován v [JV] 7.4.6 jako rozdíl aproximované a aproximující funkce

$$R_n = f - T_n.$$

V [JV] jsou 2 věty o zbytku.

Věta 7.4.8 uvádí Lagrangeův tvar zbytku a my ho v odstavci **7** použijeme na výpočet horního odhadu zbytku – tedy chyby, které se dopustíme při nahrazení funkce f jejím Taylorovým polynomem.

Lemma 7.2.20 uvádí řád zbytku (zbytek R_n je v okolí bodu x_0 „řádově“ menší než $(x-x_0)^n$) a my jej použijeme v odstavci **6** k výpočtu limit a v odstavci **5** ke snadnější konstrukci Taylorových polynomů některých složitějších funkcí.

4. Příklad (více [JV] 7.4.14). Maclaurinův polynom exponenciální funkce je

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

Maclaurinův polynom funkce sin je

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

a Maclaurinův polynom funkce cos je

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Pomocí zbytku Taylorova polynomu můžeme tyto funkce vyjádřit takto

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(x),\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \tilde{R}_4(x), \qquad (1)\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \tilde{\tilde{R}}_4(x).
\end{aligned}$$

Lemma 7.4.20 říká, že zbytek R_n se zmenšuje k nule v okolí středu x_0 Taylorova polynomu rychleji než n-tá mocnina. Přesněji vyjádřeno, platí:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to 0. \qquad (2)$$

Lemma 7.4.20 dále říká, že jiný polynom než Taylorův vlastnost (2) nemá. Tuto „jedinečnost“ Taylorových polynomů použijeme v následujících příkladech.

5. Složitější příklad. Chceme-li sestrojit Maclaurinův polynom stupně 6 funkce

$$f : x \mapsto \sin(3x^2),$$

můžeme buď vypočíst derivace (uvádíme jen výsledky, podrobnosti výpočtu necháme na laskavém čtenářovi)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x\cos(3x^2),\\
f''(x) &= 6\cos(3x^2) - 36x^2\sin(3x^2),\\
f^{(3)}(x) &= -108x\sin(3x^2) - 6^3x^3\cos(3x^2),\\
f^{(4)}(x) &= (6^4x^4 - 108)\sin(3x^2) - 6^4x^2\cos(3x^2),\\
f^{(5)}(x) &= 6^4 10x^3\sin(3x^2) + (6^5x^5 - 6^3 15x)\cos(3x^2),\\
f^{(6)}(x) &= (-6^6x^6 + 6^4 45x^2)\sin(3x^2) + (6^5 15x^4 - 6^3 15)\cos(3x^2),
\end{aligned}$$

vyčíslit jejich hodnoty v nule a dostaneme

$$T_6(x) = 3x^2 - \frac{9x^6}{2}.$$

Alternativní a doporučený způsob výpočtu je dosadit $y = 3x^2$ do

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + R_3(y).$$

Dostaneme

$$\sin(3x^2) = 3x^2 - \frac{9x^6}{2} + R_3(3x^2).$$

V dalším ukážeme, že $R_3(3x^2)$ splňuje (2) pro $n = 6$ a tím ukážeme, že $T_6(x) = 3x^2 - 9x^6/2$ je Taylorův polynom funkce $x \mapsto \sin(3x^2)$.

O zbytku R_3 víme, že splňuje (2), tedy

$$\frac{R_3(y)}{y^3} \to 0 \quad \text{pro} \quad y \to 0,$$

odkud po substituci $y = 3x^2$ dostaneme (o substituci v limitě více v textu o limitě složené funkce)

$$\frac{R_3(3x^2)}{27x^6} \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to 0,$$

což je totéž jako

$$\frac{R_3(3x^2)}{x^6} \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to 0.$$

Vidíme, že polynom

$$T(x) = 3x^2 - \frac{9x^6}{2}$$

splňuje tvrzení lemmatu 7.4.20 a protože víme, že jediný polynom toto tvrzení splňující je Taylorův polynom (viz znění zmíněné věty), dostali jsme hledaný výsledek

$$T_6(x) = 3x^2 - \frac{9x^6}{2}.$$

6. Výpočet limity pomocí Taylorova polynomu. Chceme vypočíst limitu $f(x)/x^6$ pro $x \to 0$, kde

$$f(x) = \sin(x^2) - x^2e^{2x^2} + \sin(2x^4).$$

Nejdříve zvolíme stupeň polynomu – označíme jej n a dosadíme $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ do počítané limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{T_n(x) + R_n(x)}{x^6}$$

a nahlédneme, že je vhodné zvolit stupeň 6, protože pak vzhledem k (2) bude platit

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{T_6(x)}{x^6}. \tag{3}$$

Obdobně jako v předchozím příkladu odvodíme

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \tilde{R}_3(x^2), \qquad \frac{\tilde{R}_3(x^2)}{(x^2)^3} \to 0 \text{ pro } x \to 0,$$

$$x^2 e^{2x^2} = x^2 \left(1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + \tilde{\tilde{R}}_2(2x^2)\right), \qquad \frac{x^2 \tilde{\tilde{R}}_2(2x^2)}{x^2 (2x^2)^2} \to 0 \text{ pro } x \to 0,$$

$$\sin(2x^4) = 2x^4 - \frac{(2x^4)^3}{6} + \tilde{\tilde{\tilde{R}}}_3(2x^4), \qquad \frac{\tilde{\tilde{\tilde{R}}}_3(2x^4)}{(2x^4)^3} x^6 \to 0 \cdot 0 = 0 \text{ pro } x \to 0,$$

Odtud dostaneme

$$\sin(x^2) - x^2 e^{2x^2} + \sin(2x^4) = x^2 - \frac{x^6}{6} - x^2 \left(1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2}\right) + 2x^4 + R_6(x),$$

kde jsme do zbytku R zahrnuli jak $\tilde{R}$, $\tilde{\tilde{R}}$ a $\tilde{\tilde{\tilde{R}}}$, tak člen obsahující x^{12}. Po úpravě dostaneme

$$\sin(x^2) - x^2 e^{2x^2} + \sin(2x^4) = -\frac{x^6}{6} - \frac{4x^6}{2} + R_6(x).$$

K výpočtu limity použijeme (3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2 e^{2x^2} + \sin(2x^4)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{-13/2 x^6}{x^6} = -\frac{13}{2}.$$

7. Vyčíslení výrazu. Chceme přibližně vyčíslit výraz $\sqrt{1.12}$. Použijeme Taylorův polynom spočítaný v příkladě 2.

$$\sqrt{x} = 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3 + R_3(x),$$

po dosazení za x dostaneme

$$\sqrt{1.12} = 1.058308 + R_3(1.12).$$

K odhadu zbytku (chyby výpočtu) použijeme tvar zbytku [JV] (7.12). Dostaneme

$$R_3(1.12) = \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} 0.12^4, \quad \text{kde } f(x) = \sqrt{x},\ \zeta \in (1, 1.12).$$

Výpočet dá $R_3(1.12) = -8.1 \times 10^{-6} (\zeta)^{-7/2}$, kde $\zeta \in (1, 1.12)$. Odtud vidíme, že pouze poslední cifra v $\sqrt{1.12} \doteq 1.058308$ je nepřesná a dostali jsme výpočet odmocniny zaokrouhlený na 5 desetinných míst.

$$\sqrt{1.12} \doteq 1.05830.$$