# Matematická analýza pro učitele
# (text je v pracovní verzi)

Martina Šimůnková

6. června 2018

# Obsah

# Kapitola 1

# Úvod

V textu se budeme zabývat *funkcemi* jedné reálné proměnné. V této úvodní kapitole vyložíme, co to funkce je, a nastíníme, co všechno nás na funkcích bude zajímat.

## 1.1 Co je to funkce

Historicky byla funkce předpis, např. $f(x) = x^2$. Dnes pod pojmem funkce rozumíme závislost mezi dvěma proměnnými, která může, ale nemusí být dána jedním předpisem. Tyto stručné historické poznámky čerpáme z [1], 4.4.7, zvídavý čtenář tam najde další podrobnosti.

Funkce zadané (jedním) předpisem nazýváme *elementármími funkcemi.* Zkoumání těchto funkcí bude jedním z našich cílů, ale nikoliv jediným. Níže v odstavci 1.3 uvedeme jejich přehled.

Příkladem funkcí zadaných jinak než jedním předpisem jsou funkce $f$, $g$,

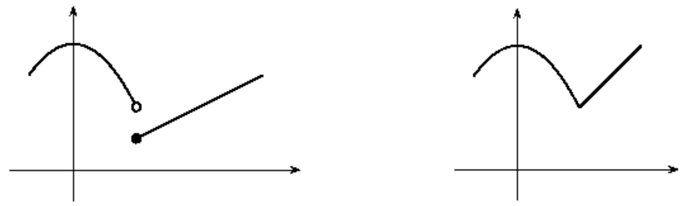
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x/2 & x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Dirichletova funkce $\delta$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nebo funkce zadané empiricky jako například průběh teploty naměřené meteorologickou stanicí v závislosti na čase.

Důležitým pojmem je *graf funkce.* Na obrázku jsou grafy funkcí z (1.1), vlevo funkce $f$, vpravo $g$.



Grafem Dirichletovy funkce jsou dvě „řídké“ přímky.

Někdy se funkce definuje primárně jako její graf, tedy množina dvojic reálných čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ taková, že k jednomu číslu $x$ leží na tomto grafu maximálně jedno $y$. Jinak řečeno, leží-li body $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ na grafu funkce, musí platit $y_1 = y_2$. Formálně zapsáno $G \subset \mathbb{R}^2$ je grafem funkce, pokud platí

$$(\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R})(([x, y_1] \in G \wedge [x, y_2] \in G) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Teprve z grafu funkce je poté odvozen předpis a definiční obor funkce. Číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřadíme číslo $y$ splňující $[x, y] \in G$. Definičním oborem je množina čísel $x$, pro něž existuje číslo $y$ takové, že $[x, y] \in G$.
TODO:
PŘÍKLADY GRAFŮ, NEGRAFŮ, DEFINIČNÍCH OBORŮ, PŘEDPISŮ

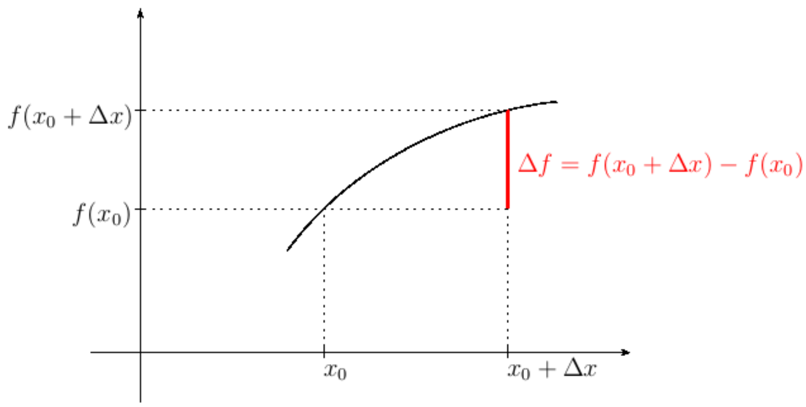
Výše mluvíme o funkci jako vztahu dvou proměnných. Jednu proměnnou zpravidla označujeme $x$ a nazýváme ji *argumentem* funkce, *proměnnou* funkce, *vzorem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla nezávisle proměnnou. Druhou proměnnou zpravidla označujeme $y$ nebo $f(x)$ (pro funkci pojmenovanou $f$) a nazýváme ji *funkční hodnotou*, *obrazem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla závisle proměnnou. Pokud mají proměnné nějaký význam, třeba geometrický (délka, obsah, souřadnice, ...) nebo fyzikální (čas, rychlost, síla, teplota, ...), často použijeme místo $x$, $y$ značení dané veličině odpovídající, například $t$ pro čas, $s$ pro vzdálenost a $s = 1/2gt^2$ pro závislost dráhy na čase při pohybu v gravitačním poli intenzity $g$. Nebo $a$ pro délku hrany krychle, $V$ pro objem krychle a $V = a^3$ pro závislost objemu na délce hrany.

Pojmy (termíny) vzor a obraz znáte z geometrie při zobrazování (posunutí, otočení, zrcadlení). Funkce je speciálním typem zobrazení, kde vzory a obrazy jsou čísla.

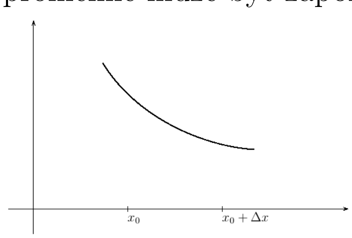
**Úkol.** Uveďte další příklady funkcí jak elementárních, tak ostatních. Nejlépe takové, které popisují závislost fyzikálních, geometrických, případně jiných „reálných“ veličin. Dále uveďte příklady množin $G \subset \mathbb{R}^2$ a určete, zda jsou grafem funkce a případně určete definiční obor a předpis funkce.

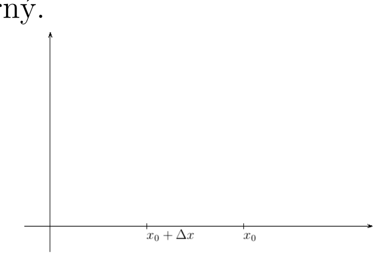
## 1.2 Co budeme na funkcích zkoumat

Bude nás zajímat, jak se mění funkční hodnota při změně proměnné – tyto změny zpravidla znázorňujeme na grafu funkce a používáme k tomu níže uvedenou terminologii.




Číslo $\Delta x$ budeme nazývat *přírůstkem proměnné* $x$, číslo $\Delta f$ *přírůstkem funkce* (přesnější by asi bylo říkat přírůstek funkční hodnoty, ale moc se to nepoužívá). Následující obrázky ukazují, že jak přírůstek funkce, tak přírůstek proměnné může být záporný.



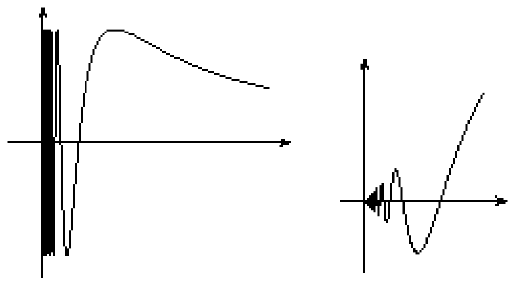




### 1.2.1 Spojitost funkce

V případě, že je přírůstek funkce $\Delta f$ „malý“ pro „malé“ hodnoty $\Delta x$, budeme říkat, že je funkce $f$ *spojitá v bodě* $x_0$. Úvozovkami chceme zdůraznit značnou vágnost tohoto popisu. Pojem spojitosti se vyvíjel, podle poznámek 4.4.7 zmíněných výše byly kdysi obě funkce $f$, $g$ uvedené v (1.1) nespojité [1] v bodě

[1] Říkáme-li, že je funkce v bodě nespojitá, máme na mysli, že není spojitá. Toto není zcela samozřejmé, například rostoucí a nerostoucí funkce nejsou v tomto smyslu doplňkové pojmy.

$x = 1$, protože se v tomto bodě mění funkční předpis. Podle současné definice spojitosti není funkce $f$ v bodě $x = 1$ spojitá zatímco funkce $g$ ano. Přesná definice pojmu spojitosti je poměrně obtížná a uvedeme ji později. K jejímu bližšímu objasnění uvedeme ještě několik příkladů.



Na levém obrázku je graf funkce

$$f(x) = \sin(1/x),$$

na pravém

$$g(x) = x\sin(1/x).$$

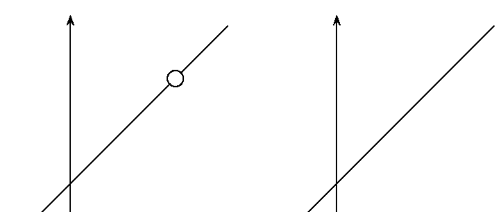
Obě funkce mají kořeny v bodech $1/x = k\pi$, tedy $x = 1/(k\pi)$, a tedy v okolí nuly je kořenů nahuštěno nekonečně mnoho. V bodě $x = 0$ tyto funkce nejsou definované. Pokud chceme, můžeme je v tomto bodě dodefinovat. Vzniknou tím nové funkce, které označíme $\hat{f}$, $\hat{g}$.

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \hat{g}(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Říkáme, že funkce $\hat{f}$ je *rozšířením funkce* $f$, funkce $\hat{g}$ je rozšířením funkce $g$.

Protože pro hodnoty $x$ „blízké“ nule jsou hodnoty $\hat{g}(x)$ „blízké“ $\hat{g}(0)$, je funkce $\hat{g}$ spojitá v bodě nula a mluvíme o *spojitém rozšíření*. Funkce $\hat{f}$ je rozšířením funkce $f$, ale není jejím spojitým rozšířením.

Na následujících obrázcích je další příklad spojitého rozšíření, kdy definiční obor výrazu zvětšíme pokrácením.



Na obrázku vlevo je graf funkce

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a vpravo graf funkce

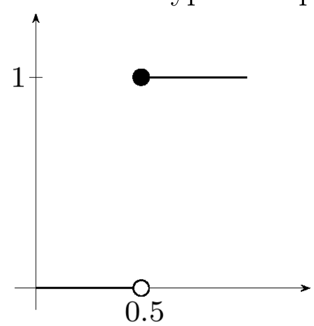
$$\hat{h}(x) = x + 1.$$

K pojmu spojitosti zatím uvedeme, že elementární funkce (tedy funkce zadané jedním funkčním předpisem, které znáte ze střední školy) jsou na svých definičních oborech spojité.

Pokud funkce není v bodě $x_0$ spojitá, ale lze ji v tomto bodě spojitě rozšířit, říkáme, že má funkce v bodě $x_0$ *odstranitelnou nespojitost*. Příkladem

odstranitelných nespojitostí je nespojitost funkce $g$ v bodě $x = 0$ a nespojitost funkce $h$ v bodě $x = 1$.
TODO:
ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PŘEDEFINOVÁNÍM FUNKCE

Dalším typem nespojitosti je *nespojitost typu skoku*.




Uvažujme funkci, která číslu $x$ přiřadí číslo, které z čísla $x$ vznikne zaokrouhlením na celé číslo. Tato funkce není spojitá v bodě $x = 0.5$.
Čísla $x \in (0, 0.5)$ zaokrouhlíme na nulu, zatímco čísla $x \in (0.5, 1)$ zaokrouhlíme na jedničku. Funkční hodnota tedy při „přechodu“ přes $x = 0.5$ „skočí“ o jedna.

Příkladem funkce, která není spojitá a tato nespojitost není odstranitelnou nespojitostí ani nespojitostí typu skoku, jsou funkce $f$ a $\hat{f}$.

### 1.2.2 Limita funkce

TODO: SPOJITÉ ROZŠÍŘENÍ A LIMITA

### 1.2.3 Derivace

Dalším pojmem je *derivace*, která „malé“ změny proměnných přesněji kvantifikuje. Funkce v zadaném bodě derivaci mít může, ale nemusí. Má-li derivaci, znamená to, že pro malou změnu proměnné funkce je změna funkční hodnoty přibližně úměrná a konstantou této úměrnosti je hodnota derivace v daném bodě.

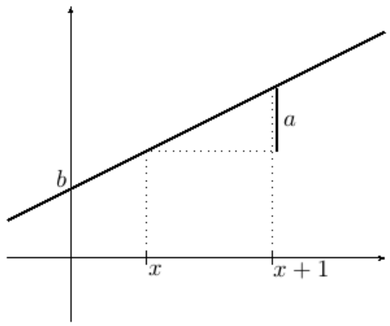
TODO: Obrázek.
TODO: Co se děje při nepřesných výpočtech.
TODO: Hodnota derivace a graf funkce.
TODO: Přímá úměrnost a derivace.

## 1.3 Elementární funkce.

Uvedeme stručný přehled elementárních funkcí.

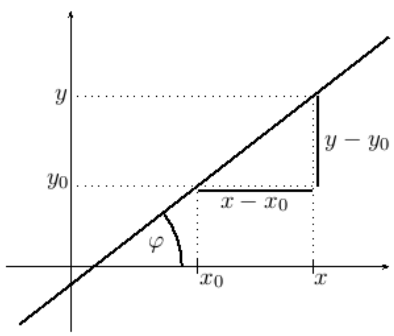
### 1.3.1 Lineární funkce – přímá úměrnost

Grafem lineární funkce $f(x) = ax + b$ je přímka. Vysvětlíme geometrický význam koeficientů $a$, $b$.




Dosazením $x = 0$ dostaneme $f(x) = b$, proto graf protíná osu $y$ v bodě $[0, b]$.
Číslo $a$ nazýváme *směrnicí přímky* a je rovno přírůstku funkce odpovídajícímu přírůstku proměnné o jedna

$$f(x + 1) = a(x + 1) + b = f(x) + a.$$




Z podobnosti trojúhelníků na grafu lineární funkce pak plyne, že přírůstek funkce $\Delta y$ je přímo úměrný přírůstku proměnné $\Delta x$. Spočítáme konstantu úměrnosti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a$$

Dostáváme tedy $\Delta y = a\Delta x$ a odtud i rovnici přímky, která má směrnici $a$ a prochází bodem $[x_0, y_0]$

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

V případě stejného měřítka na osách lze vyjádřit směrnici pomocí úhlu $\varphi$, který přímka svírá s kladnou poloosou $x$: $a = \operatorname{tg}\varphi$.

TODO: stručné články o dalších funkcích

# Kapitola 2

# Čísla

TODO: KAPITOLA O ČÍSLECH

## 2.1 Supremum, infimum

**Lemma.** Pokud pro dvě množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$ platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$$

pak platí $\sup A \leq \inf B$.

Doporučení: před čtením důkazu nakreslete číselnou osu a několik prvků množiny $A$ i $B$ splňujících uvedenou vlastnost.

**Důkaz.** Uvažujme libovolné $b \in B$. Z předpokladů lemmatu plyne, že $b$ je horní závorou množiny $A$. Supremum množiny $A$ je nejmenší horní závora, a proto platí $b \geq \sup A$ a platí to pro všechna $b \in B$. Odtud plyne, že $\sup A$ je dolní závora množiny $B$ a odtud plyne $\sup A \leq \inf B$, protože infimum je největší dolní závora. $\square$

# Kapitola 3

# Limita funkce

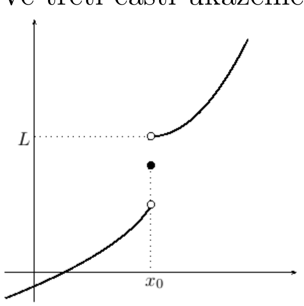
## 3.1 Limita monotonní funkce

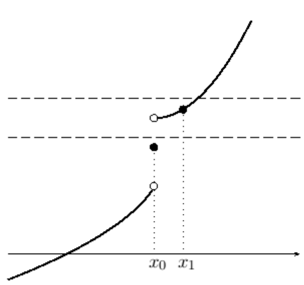
Ukážeme, že monotonní funkce má jednostranné limity. Důkaz tohoto tvrzení je přímočarý a jednoduchý pro toho, kdo rozumí definicím limity, suprema a infima. Pro ostatní je důkaz příležitostí si tyto definice zopakovat a více jim porozumět.

**Lemma o jednostranných limitách neklesající funkce.** Nechť je funkce $f$ neklesající na intervalu $(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. Pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ vlastní jednostranné limity a platí

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Důkaz rozdělíme na tři části. V první ukážeme existenci limity zprava. Existence limity zleva se ukáže analogicky, proto řekneme jen hlavní myšlenku. Ve třetí části ukážeme nerovnost mezi jednostrannými limitami.




Na levém obrázku je graf neklesající funkce $f$ v okolí bodu $x_0$. Na ose $y$ je vyznačeno infimum funkčních hodnot z pravého okolí bodu $x_0$

$$L = \inf\{f(x) : x > x_0\}$$

Na pravém obrázku je navíc okolí $\mathcal{U}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ (a bod $x_1$ – o něm více dále).

Chceme ukázat, že platí $L = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. K tomu je potřeba ukázat existenci pravého okolí bodu $x_0$: $(x_0, x_0+\delta)$ takového, že pro $x \in (x_0, x_0+\delta)$ platí $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Na pravém obrázku je v okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ bodu $L$ vyznačena funkční hodnota bodu $x_1 > x_0$ splňující $f(x_1) < L+\varepsilon$. Existence takového $x_1$ plyne z toho, že infimum $L$ je největší dolní závora, proto $L+\varepsilon > L$ není dolní závora – tedy musí existovat $x_1 > x_0$ splňující $f(x_1) < L+\varepsilon$.

Ukažme, že interval $x \in (x_0, x_1)$ je hledaným pravým okolím bodu $x_0$ (tedy $\delta = x_1 - x_0$). K tomu je potřeba ukázat, že pro $x \in (x_0, x_1)$ platí $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$:
Z $x > x_0$ plyne $f(x) \geq L$ ($L$ je dolní závora těchto funkčních hodnot). Odtud plyne $f(x) > L-\varepsilon$.
Z $x < x_1$ plyne pro neklesající funkci $f$ platnost $f(x) \leq f(x_1)$ a odtud $f(x) < L+\varepsilon$.

Tím jsme ukázali, že $L$ je rovno limitě funkce $f$ v bodě $x_0$ zprava.

Podobně se ukáže, že $M = \sup\{f(x) : x < x_0\}$ je limitou funkce $f$ v bodě $x_0$ zleva.

Zbývá ukázat, že $M \leq L$. Zvolme $x_+ > x_0$. Z monotonie plyne, že $f(x_+)$ je horní závora množiny $\{f(x) : x < x_0\}$, proto platí $f(x_+) \geq M$, protože $M$ je nejmenší horní závora téže množiny. Odtud plune, že $M$ je dolní závora množiny $\{f(x) : x > x_0\}$, a proto je $M \leq L$, protože $L$ je největší dolní závora téže množiny. $\square$

Přechodem k funkci $-f$ (minus $f$) dokážeme následující „duální“ lemma.

**Lemma o jednostranných limitách nerostoucí funkce.** Nechť je funkce $f$ nerostoucí na intervalu $(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. Pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ vlastní jednostranné limity a platí

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \geq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Důkaz. Je-li $f$ nerostoucí na $(a,b)$ je $-f$ neklesající na $(a,b)$. Z lemmatu o jednostranných limitách neklesající funkce dostaneme existenci jednostranných limit a vztah

$$\lim_{x\to x_0^-} (-f(x)) \leq \lim_{x\to x_0^+} (-f(x)).$$

Odtud vynásobením minus jedničkou dostaneme

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \geq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

□

## 3.2 Limita složené funkce

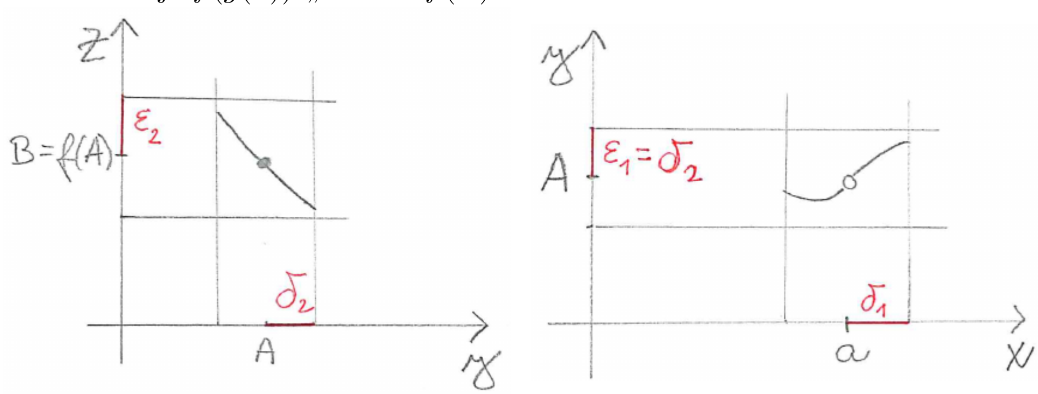
V tomto článku vysvětlíme větu 4.4.1 o limitě složené funkce z [1] a naučíme se ji používat. Věta zahrnuje dva případy a v obou nejdříve vypočteme limitu vnitřní funkce. Následující příklad ilustruje případ (1) uvedené věty.

**Příklad.** Chceme spočítat limitu funkce $f : x \mapsto \sqrt{\frac{4-x^2}{x+2}}$ pro $x \to -2$.

Řešení. Vypočteme nejdříve limitu vnitřní funkce $\frac{4-x^2}{x+2} = 2 - x \to 4$ a dosadíme ji do vnější funkce. Dostaneme výsledek $\sqrt{4} = 2$.

Komentář. V příkladu jsme použili spojitost vnější funkce.

Důkaz věty je přímočarý a jednoduchý pro čtenáře zručného v práci s okolími. Neformálně jej můžeme převyprávět: vnitřní funkce $g$ má v bodě $a$ limitu $A$, což znamená, že pro $x$ „blízké“ $a$, ale různé od $a$ je $g(x)$ „blízké“ $A$. Funkce $f$ je spojitá v bodě $A$, což znamená, že pro $y$ „blízké“ $A$ je $f(y)$ „blízké“ $f(A)$, a to je rovno limitě $B$. Odtud plyne, že pro $x$ „blízké“ $a$, ale různé od $a$ je $f(g(x))$ „blízké“ $f(A) = B$.




Bod (1) věty 4.4.1 pro posloupnosti je jednou z implikací věty 4.2.11 a verzi pro funkce dostaneme za použití věty 4.3.7 – tím máme druhý způsob důkazu.

Následující příklad ilustruje bod (2) věty 4.4.1.

**Příklad.** Chceme spočítat limitu funkce $f : x \mapsto 2^{-1/x^2}$ pro $x \to 0$.

Řešení. Vypočteme nejdříve limitu vnitřní funkce $-1/x^2 \to -\infty$ a poté limitu vnější funkce: $2^y \to 0$ pro $y \to -\infty$.

Komentář. V tomto případě je podmínka z věty 4.4.1 splněna – vnitřní funkce nenabývá hodnoty $-\infty$.

Důkaz převyprávíme neformálně: vnitřní funkce $g$ má v bodě $a$ limitu $A$, což znamená, že pro $x$ „blízké“ $a$, ale různé od $a$ je $g(x)$ „blízké“ $A$. Zároveň z předpokladů věty víme, že pro taková $x$ je $g(x)$ různé od $A$. Funkce $f$ má v bodě $A$ limitu $B$, což znamená, že pro $y$ „blízké“ $A$, ale různé od $A$ je $f(y)$ „blízké“ $B$. Odtud plyne, že pro $x$ „blízké“ $a$, ale různé od $a$ je $f(g(x))$ „blízké“ $B$.

### 3.2.1 Substituce v limitě

Bod (2) věty 4.4.1 můžeme často interpretovat jako substituci v limitě. Vysvětlíme to na příkladu.

**Příklad.** Chceme spočítat limitu funkce $f : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{x}$.

Řešení. Víme, že limita $\frac{\sin y}{y}$ je pro $y \to 0$ rovna jedné, proto upravíme $\frac{\sin(3x)}{x} = 3\,\frac{\sin(3x)}{3x}$ a limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$ převedeme na limitu $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$. Hodnota zadané limity je tedy rovna třem.

Komentář. Pro $x \to 0$ je $y = 3x \to 0$, proto počítáme i druhou limitu v nule. Pro $x \neq 0$ je $3x \neq 0$, proto můžeme použít (2) věty 4.4.1.

**Poznámka.** Podmínka pro vnitřní funkci – nemá nabývat limitní hodnoty v nějakém prstencovém okolí limitního bodu – je splněna v případě funkcí, které jsou na nějakém levém i pravém okolí ryze monotonní (tedy buď rostoucí nebo klesající).

Příklady, kdy toto není splněno a chybné použití věty vede ke špatnému výsledku jsou limita $\operatorname{sgn}(x\sin(1/x))$ pro $x \to 0$ nebo příklad 4.4.2. z [1]: limita $1 - |\operatorname{sgn}(|\operatorname{sgn} x| - 1)|$ pro $x \to 0$.

**Úkoly.** Vysvětlete, proč nemá funkce $x \mapsto \operatorname{sgn}(x\sin(1/x))$ v bodě nula limitu. Určete, čemu je rovna limita $1 - |\operatorname{sgn}(|\operatorname{sgn} x| - 1)|$ pro $x \to 0$.

### 3.2.2 Substituce v jednostranných limitách

Většina funkcí, se kterými se setkáte, je na dostatečně malých jednostranných okolích monotonní. Výjimkou je výše uvedený příklad funkce $x \mapsto x\sin(1/x)$ v okolí nuly. Podmínka (2) z věty 4.4.1 je splněna v případě rostoucích a klesajících funkcí.

V případě jednostranných limit použijeme druh monotonie (tedy zda je funkce rostoucí nebo klesající) k určení druhu limity (tedy zda zleva nebo zprava) po substituci. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

**Příklad.** Chceme spočítat limitu funkce $x \mapsto \operatorname{cotg}(2^{1/x})$ pro $x \to 0^-$.

Řešení. Vnitřní funkce $x \mapsto 1/x$ má pro $x \to 0^-$ limitu rovnu $-\infty$. Funkce $y \mapsto 2^y$ má pro $y \to -\infty$ limitu rovnu nule a v okolí $-\infty$ nabývá hodnot větších než nula – proto budeme v dalším kroku počítat limitu v nule zprava. Funkce $z \mapsto \operatorname{cotg} z$ má pro $z \to 0^+$ limitu $+\infty$ – a to je zároveň hledaná limita.

# Kapitola 4

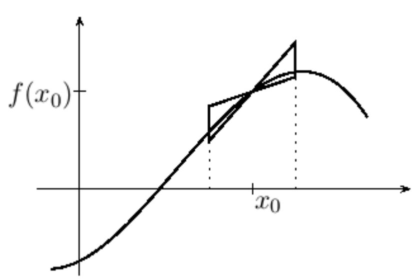
# Derivace funkce

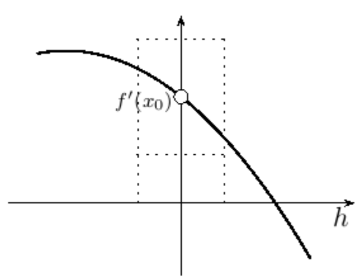
## 4.1 Derivace a extrémy

**Lemma o znaménku derivace a chování funkce v okolí bodu.** Nechť má funkce $f$ v bodě $x_0$ kladnou derivaci $f'(x_0) > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) < f(x_0)), (\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) > f(x_0))$$

Důkaz. Na levém obrázku je graf funkce $f$ s bodem $x_0$, pro nějž platí $f'(x_0) > 0$.
Na pravém obrázku je graf funkce $g$, která přírůstku $h$ přiřadí směrnici sečny $g : h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ s vyznačenou limitou v nule, která je rovna $f'(x_0)$. Dále je na pravém obrázku vyznačeno okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ ležící v intervalu $(0, +\infty)$ a jemu odpovídající okolí $\mathcal{U}_\delta(0)$ splňující $h \in \mathcal{U}_\delta(0) \Rightarrow g(h) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$. Krajní hodnoty okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ se na obrázku vlevo zobrazí na přímky o rovnicích $y = (f'(x_0) \pm \varepsilon)(x - x_0) + f(x_0)$. Graf funkce $f$ na okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ leží mezi těmito přímkami a odtud plyne tvrzení lemmatu.




$\square$

Přechodem k funkci $-f$ dostaneme „duální“ lemma.

**Lemma.** Nechť má funkce $f$ v bodě $x_0$ zápornou derivaci $f'(x_0) < 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) > f(x_0)), (\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) < f(x_0))$$

**Věta o derivaci a extrémech.** Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ derivaci a lokální extrém, pakje $f'(x_0) = 0$.

DŮKAZ. Věta je přímým důsledkem lemmatu o znaménku derivace a chování funkce v okolí. □

## 4.2 Lagrangeova a Rolleova věta

TODO: znění vět, důkazy

## 4.3 Derivace a monotonie

**Věta o neklesající funkci a znaménku derivace.** Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je $f$ neklesající na $I$ právě když je $f'$ nezáporná na $I$.

DŮKAZ. Máme dokázat ekvivalenci, budeme dokazovat dvě implikace. První implikace: je-li $f'$ nezáporná na $I$, pak je $f$ na $I$ neklesající. Druhá implikace: je-li $f$ neklesající na $I$, pak je $f'$ na $I$ nezáporná.

Důkaz první implikace: je-li $f'$ nezáporná na $I$, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, pak z Lagrangeovy věty plyne existence $x_3 \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3) \geq 0,$$

odtud plyne $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ a tedy je $f$ neklesající na $I$.

Místo druhé implikace dokážeme její obměnu: není-li $f'$ nezáporná na $I$, pak není $f$ neklesající na $I$: pokud není $f'$ na intervalu $I$ nezáporná, existuje $x_0 \in I$, pro něž je $f'(x_0) < 0$. Z lemmatu o znaménku derivace a chování v okolí z článku 4.1, plyne, že $f$ není v okolí $x_0$ neklesající, a tedy ani není neklesající na $I$. □

**Věta o nerostoucí funkci a znaménku derivace.** Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je $f$ nerostoucí na $I$ právě když je $f'$ nekladná na $I$.

Důkaz. Stačí použít předchozí větu na funkci $-f$. $\square$

**Věta o nulové derivaci.** Má-li funkce $f$ na intervalu $I = (a, b)$ nulovou derivaci, pak je $f$ na $I$ konstantní.

Důkaz. Z předchozích vět plyne, že funkce $f$ je na intervalu $I$ neklesající a nerostoucí. Odtud plyne, že je konstantní. $\square$

**Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace.** Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je $f$ rostoucí na $I$ právě když je $f'$ nezáporná na $I$ a zároveň není $f'$ nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I$.

Důkaz. Opět dokážeme dvě implikace.

První implikace: nechť je $f$ rostoucí na $I$. Pak z předchozí věty plyne, že má $f$ na $I$ nezápornou derivaci. Zbývá ukázat, že derivace $f'$ není nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I$ – to plyne z věty o nulové derivaci a z toho, že je $f$ rostoucí.

Opačná implikace: z předchozí věty víme, že z nezápornosti derivace plyne, že je funkce neklesající. Chceme ukázat, že je rostoucí. Rozebereme, co platí pro funkci, která není rostoucí, ale je neklesající: existují $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pro něž je $f(x_1) = f(x_2)$. Protože je $f$ neklesající na $I$, je konstantní na $I_1 = (x_1, x_2)$. Odtud plyne, že má $f$ na $I_1$ nulovou derivaci, a to vylučují předpoklady věty. Proto je $f$ na $I$ rostoucí. $\square$

# Kapitola 5

# Elementární funkce

## 5.1 Polynomy

**Otázky.** Kolik reálných kořenů může mít kvadratická rovnice? Kolik kubická rovnice? Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše pět s reálnými koeficienty $a_0,\dots,a_5$?

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše $n$ s reálnými koeficienty $a_0,\dots,a_n$?

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

**Otázka.** Kolik kořenů $x \in \mathbb{R}$ má rovnice v závislosti na hodnotách $a$, $b$? Má pro nějaké hodnoty $a$, $b$ více jak jeden kořen?

$$ax + b = 0$$

**Otázka.** Který z následujících polynomů nelze v reálném oboru rozložit na součin polynomů nižších stupňů? Takovým polynomům budeme říkat nerozložitelné polynomy.

$$x^2 + x + 1 \qquad x^2 - x - 1 \qquad x^3 + 1 \qquad x^4 + 1$$

**Úkol.** Upravte polynomy na součin v reálném oboru nerozložitelných polynomů.

$$x^3 + 8 \qquad x^5 - 32 \qquad x^3 + 2x - 3 \qquad x^8 - 1$$

## 5.2 Racionální funkce

**Úkoly.** Vyjádřete výrazy jako součet polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{x^3}{x^2+1} \qquad \frac{-x^2+2}{x^2-1} \qquad \frac{3x^2+x+2}{x^3-4x+3} \qquad \frac{1}{x^3(x^2+1)} \qquad \frac{x^3}{(x^2+x+3)^2}$$

## 5.3 Mocniny

Předpokládáme, že je čtenář seznámený s vlastnostmi mocnin. Cílem podkapitoly je se nad těmito vlastnostmi zamyslet. Proto je velká část látky vyložena formou otázek a úkolů.

**Otázky.** Proč je $2^0 = 1$? Proč je $3^{1/2} = \sqrt{3}$? Proč je $4^{-1} = 1/4$?
Které rovnosti se vzdáte?

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$$

Jaký je definiční obor třetí odmocniny? Jaký je definiční obor mocniny s exponentem jedna třetina?

**Úkol.** Nakreslete do jednoho obrázku grafy mocninných funkcí s exponenty jedna, dva, jedna polovina, jedna třetina, tři poloviny, pět polovin, tři.

### 5.3.1 Mocniny s přirozeným exponentem

Zápis $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\times} = a^n$ můžeme chápat jako zkratku. Přímočaře vede k definici $a^n$ pro $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$a^1 = a \quad \text{a pro } n \geq 2 \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \tag{5.1}$$

a ke vztahům z této definice vyplývajícím pro $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad a^{nm} = (a^n)^m \tag{5.2}$$

Na tyto vztahy se budeme v dalším textu odvolávat. Při definici $a^x$ pro obecčjší typ exponentu $x$ budeme požadovat jejich splnění pro tyto obecnější exponenty.

### 5.3.2 Mocniny s celočíselným exponentem

Z (5.1) plyne, že posloupnost

$$a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

je geometrická s kvocientem $a$. Když k této posloupnosti přidáme na začátek další členy

$$\dots a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

a budeme požadovat, aby byla také geometrická[1], dostaneme pro $a \neq 0$

$$a^0 = a^1/a = 1, \quad a^{-1} = a^0/a = 1/a, \quad a^{-2} = a^{-1}/a = 1/a^2, \dots$$

Jiný způsob odvození je použít vztah z (5.1) $a^n = a \cdot a^{n-1}$, vyjádřit z něj $a^{n-1} = a^n/a$ a použít pro $n \in \mathbb{Z}$.

### 5.3.3 Mocniny s racionálním exponentem

K odvození vztahu pro $a^{1/2}$ použijeme (5.2) s $n = m = 1/2$. Dostaneme $a = a^1 = a^{1/2+1/2} = a^{1/2}a^{1/2}$ a odtud dostaneme pro $a^{1/2}$ rovnici $\left(a^{1/2}\right)^2 = a$, a tedy jsou dvě možnosti: buď je $a^{1/2} = \sqrt{a}$ nebo $a^{1/2} = -\sqrt{a}$.

Výběr znaménka zdůvodníme následovně

$$0 \leq \left(a^{1/4}\right)^2 = a^{1/4}a^{1/4} = a^{1/4+1/4} = a^{1/2}.$$

Podobně odvodíme $\left(a^{1/3}\right)^3 = a$ a tedy $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$.

**Definice.** Pro $a \in \mathbb{R}$ a liché číslo $n \geq 3$ definujeme *$n$-tou odmocninu $a$* jako kořen rovnice $x^n = a$.

**Poznámka.** Z vlastností $n$-té mocniny plyne existence právě jedné odmocniny lichého řádu z reálného čísla $a$.

**Definice.** Pro $a \in [0, +\infty)$ a sudé číslo $n \geq 2$ definujeme *$n$-tou odmocninu* $a$ jako nezáporný kořen rovnice $x^n = a$.

**Poznámka.** Z vlastností $n$-té mocniny plyne existence právě jedné odmocniny sudého řádu z nezáporného reálného čísla $a$.

[1] Za tento způsob odvození patří poděkování studentu Martinu Nebeskému.

**Definice.** Pro $a > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ definujeme

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} \qquad a^{-n/m} = 1/\sqrt[m]{a^n} \tag{5.3}$$

**Úkol.** Ukažte, že pro $p, q, r \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qr]{a^{pr}}$.

**Poznámky.** Tvrzení v předchozím úkolu zajistí, že je definice s racionálním exponentem nezávislá na způsobu zadání exponentu.
Podle uvedené definice je mocnina s racionálním exponentem definovaná pouze pro kladný základ.

**Úkol** pro dlouhé zimní večery. Ukažte, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí $a^{q_1+q_2} = a^{q_1}a^{q_2}$.

NÁVOD. Je třeba ukázat, že pro přirozená čísla $p$, $q$, $r$, $s$ platí $\sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$, a $\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}}$.

**Úkol** pro dlouhé zimní večery. Ukažte, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí $a^{q_1 q_2} = (a^{q_1})^{q_2}$.

NÁVOD. Je třeba ukázat, že pro přirozená čísla $p$, $q$, $r$, $s$ platí $\sqrt[qs]{a^{pr}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$, a $1/\sqrt[qs]{a^{pr}} = \sqrt[s]{\left(1/\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$.

## 5.4 Exponenciální funkce

**Terminologická poznámka.** Mocninná funkce má proměnný základ a konstantní exponent, například $x \mapsto x^2$. Funkci, která má konstantní základ a proměnný exponent nazýváme *exponenciální funkcí.*

V článku 5.3 jsme v (5.3) definovali hodnotu exponenciální funkce pro racionální exponent. Zbývá odpovědět na následující otázku.

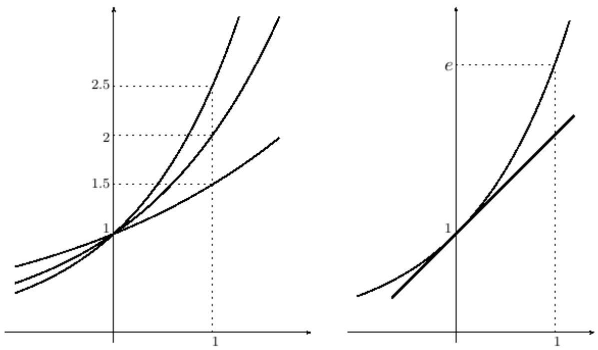
**Otázka.** Jak je definováno $2^{\sqrt{2}}$? Obecněji: jak je definována mocnina s iracionálním exponentem?

**Odpověď**, kterou dostávám od studentů: pomocí logaritmů. Protože je $\ln 2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln 2$, je $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2}$. Tím jsme převedli výpočet $2^{\sqrt{2}}$ na výpočet $e^{\sqrt{2}\ln 2}$, ale na otázku o mocnině s iracionálním exponentem jsme neodpověděli. Jen jsme převedli jednu mocninu s iracionálním exponentem na jinou.

Lepší odpověď: odmocninu ze dvou můžeme přibližně nahradit racionálním číslem, například postupně zpřesňujícím se desetinným rozvojem odmocniny: 1.4, 1.41, 1.414, ... a tedy odmocninu ze dvou můžeme postupně vyjádřit přibližně jako $2^{1.4} = \sqrt[5]{2^7}$, $2^{1.41} = \sqrt[100]{2^{141}}$, ....

Jinými slovy funkci $x \mapsto 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ dostaneme jako spojité rozšíření funkce $q \mapsto 2^x$, $q \in \mathbb{Q}$.

### 5.4.1 Eulerovo číslo




Na levém obrázku jsou grafy exponenciálních funkcí s různými základy. Všechny protínají osu $y$ v bodě $[0, 1]$, ale pod různým úhlem. Eulerovo číslo $e \doteq 2.718$ se vyznačuje tím, že protíná osu $y$ pod úhlem $\pi/4$.

Přímka vyznačená na obrázku o rovnici $y = x+1$ je tečnou grafu – to můžeme pomocí limity vyjádřit $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

### 5.4.2 Funkcionální rovnice

V [1] je exponenciální funkce definována v článku 6.3 jako funkce $f$ splňující dvě podmínky

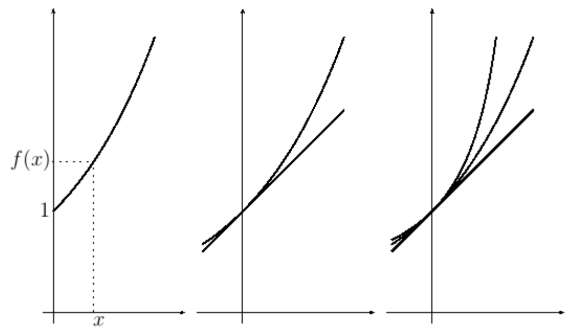
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x + y) = f(x)f(y)) \tag{5.4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \tag{5.5}$$

Náš přístup je podobný, jen používáme jiné značení. Ukážeme, že vztah (5.4) je jen jiný zápis (5.2): napíšeme-li $f(x)$ místo $a^x$ a podobně $f(y)$ místo $a^y$ a $f(x + y)$ místo $a^{x+y}$ a přejmenujeme $x$ na $n$ a $y$ na $m$, dostaneme místo vztahu $f(x + y) = f(x)f(y)$ vztah $a^{n+m} = a^n a^m$.

Podmínka (5.5) má v definici exponenciály dva významy: jednak zaručí spojitost a za druhé určí základ exponenciální funkce jako Eulerovo číslo.

V [1] jsou v lemmatu 6.3.5 uvedeny podmínky ekvivalentní s (5.5). Rozebereme tyto podmínky na grafech.




Podíl $(f(x) - 1)/x$ z podmínky (1) je směnice úsečky spojující body $(0, 1)$, $(x, f(x))$ na levém obrázku. Na obrázku uprostřed jsou vyznačeny grafy obou stran nerovnosti z bodu (2).

$$f(x) \geq x + 1 \qquad (5.6)$$

Na obrázku vpravo jsou grafy výrazů v nerovnostech z (3).

$$1 + x \leq f(x) \leq (1 - x)^{-1}$$

**Úloha.** Ukažte, že z

$$(\forall x \neq 0)(e^x \geq x + 1)$$

plyne pro $x \in (0, 1)$

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

a pro $x < 0$

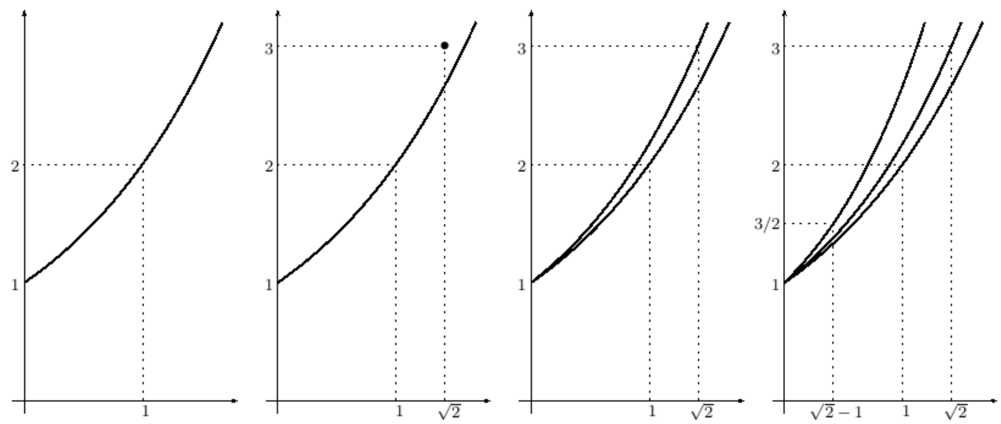
$$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1 - x}$$

a odtud plyne $(e^x - 1)/x \to 1$ pro $x \to 0$.

**Značení.** Ve shodě s matematickou literaturou budeme exponenciální funkci značit symbolem exp, tedy místo $e^x$ budeme psát $\exp(x)$ případně $\exp x$.

### 5.4.3 Nespojitá rozšíření

Ukážeme, jak by vypadal graf exponenciální funkce, kdybychom ji z $\mathbb{Q}$ rozšířili na $\mathbb{R}$ jinak než spojitě a stále požadovali splnění (5.4). V celém článku 5.4.3 značí $q$ racionální číslo.




Na levém grafu je funkce $f : q \mapsto 2^q$. Na druhém grafu zleva je funkce $f$ rozšířena hodnotou 3 v bodě $x = \sqrt{2}$. Odtud lze, podobně jako v článku 5.3, odvodit rozšíření v bodech $x = q\sqrt{2}$ hodnotami $3^q = 3^{x/\sqrt{2}}$ – graf vidíte na třetím obrázku.

Z $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 3$ a z (5.4) plyne $f(\sqrt{2}-1)f(1) = f(\sqrt{2})$, a tedy $f(\sqrt{2}-1) = f(\sqrt{2})/f(1) = 3/2$ a odtud (podobně jako v 5.3) $f(q(\sqrt{2}-1)) = (3/2)^q$, a to je znázorněno na grafu vpravo.

Podobně bychom mohli pokračovat pro $m\sqrt{2}+n$ s celočíselnými $m$, $n$ a dostali bychom graf, který je hustý[2] v horní polorovině.

V [1] jsou úvahy o nespojitém rozšíření v oddílu o aditivních funkcích v poznámce 6.2.7.

### 5.4.4 Derivace exponenciální funkce

Odvodíme vzorec pro derivaci exp′

$$(\exp(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

Úpravou $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)$ a vytknutím $\exp(x)$ dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)(\exp(h)-1)}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x)\cdot 1 = \exp(x)$$

**Poznámka.** Limita $\lim_{h\to 0}(\exp(h)-1)/h$ je, jak jsme viděli výše, důsledkem nerovnosti (5.6) a znamená, že graf exponenciální funkce protíná osu $y$ pod úhlem $\pi/4$.

[2]Myslíme tím, že v každém sebemenším čtverečku se nachází alespoň jeden bod grafu.

## 5.5 Logaritmické funkce

TODO: DEFINICE, DERIVACE, LIMITY

## 5.6 Goniometrické funkce

TODO: Trigonometrická definice a od ní odvozená definice na jednotkové kružnici. Jak budeme goniometrické funkce počítat? Budeme rýsovat a měřit? Ne, z geometrické definice odvodíme vztahy a ze vztahů výpočty.

**Úkol.** Jak počítá kalkulačka goniometrické funkce? (Téma pro bakalářskou práci.)

**Úkol.** Načrtněte pravoúhlý trojúhelník s přeponou o velikosti jedna (jednotku zvolte dle uvážení) a jeden z jeho ostrých úhlů označte $\alpha$. Vyjádřete velikosti odvěsen pomocí úhlu $\alpha$. Vyberte jednu s odvěsen a zvolte ji jako přeponu dalšího pravoúhlého trojúhelníku, který také načrtněte a velikost jednoho jeho ostrého úhlu označte $\beta$. Vyjádřete velikosti odvěsem pomocí úhlů $\alpha$, $\beta$. Tuto úlohu použijeme v dodatku pro odvození součtových vzorců.

TODO: Čím jsou významné radiány? Limita $\sin x/x$ v nule.

TODO: Derivace goniometrických funkcí (potřebujeme součtové vzorce).

TODO: Funkce „inverzní“ ke goniometrickým – arcsin, arccos, artg, arccotg, definice, grafy, limity, derivace.

# Kapitola 6

# L'Hospitalovo pravidlo

Některé limity je obtížné spočítat bez L'Hospitalova pravidla, například

$$\lim_{x\to+\infty} x\exp(-x) \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x$$

První výraz upravíme na zlomek $x/\exp x$ a dostaneme limitu typu „$\infty/\infty$“, která nám dovoluje použít L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitatele i jmenovatele, dostaneme zlomek $1/\exp x$, který má pro $x\to+\infty$ limitu rovnu nule. L'Hospitalovo pravidlo pak říká, že i původní limita je rovna nule.

Druhý výraz upravíme na zlomek $\log x/x^{-1}$ a opět dostaneme limitu typu „$\infty/\infty$“ a použijeme L'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme zlomek $(1/x)/(-x^{-2})$ a po úpravě výraz $-x$, který má pro $x\to 0^+$ limitu rovnu nule, a tedy i původní limita je rovna nule.

Formulaci L'Hospitalova pravidla a jeho důkaz najdete v [1] pod číslem 5.2.28.

**Úlohy.** Vypočtěte následující limity. Na mnohé se hodí použití L'Hospitalova pravidla, ale ne na všechny. Vždy před použitím L'Hospitalova pravidla ověřte jeho předpoklady.

NÁVOD. Součin upravte na podíl jako výše. Mocniny s proměnným základem i exponentem upravte $f(x)^{g(x)}=\exp(g(x)\log f(x))$ a počítejte limitu vnitřní funkce (exponentu). Rozdíl zlomků převeďte na společného jmenovatele.

1. $\lim_{x\to\pi/2}(x-\frac{\pi}{2})\ \mathrm{tg}\, x$
2. $\lim_{x\to\infty} x(\pi-2\,\mathrm{arctg}\, x)$

3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
5. $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/2}\log x$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$
7. $\lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x}\ \log x$
8. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$
9. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$
10. $\lim_{x\to 0^+} x\ \log \operatorname{tg} x$
11. $\lim_{x\to \pi/2^-} x\ \log \operatorname{tg} x$
12. $\lim_{x\to -\infty} x\ \log \operatorname{arctg} 2^x$

# Kapitola 7

# Konvexní funkce

TODO:
KONVEXNÍ ČTYŘÚHELNÍK.
KONVEXNÍ MNOŽINA.
KONVEXNÍ FUNKCE – NADGRAF JE KONVEXNÍ MNOŽINA.
DEFINICE KONVEXNÍ FUNKCE POMOCÍ SEČNY

**Příklady konvexních funkcí.** TODO: GRAFY

1. $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}$

2. $x \mapsto \begin{cases} x^2 - x & x \in (0,1) \\ 1 & x \in \{0,\ 1\} \end{cases}$

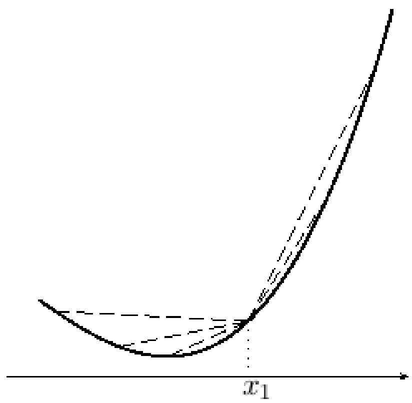
3. $x \mapsto \begin{cases} x^2 - x & x \leq 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$

## 7.1 Jednostranné derivace konvexních funkcí

**Lemma.** Nechť je funkce $f$ konvexní na intervalu $(a,b)$. Pak má funkce $f$ na intervalu $(a,b)$ konečné jednostranné derivace a pro $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ platí

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \tag{7.1}$$

Důkaz. Uvažujme funkci $f$ konvexní na intervalu $I = (a,b)$, bod $x_1 \in I$.

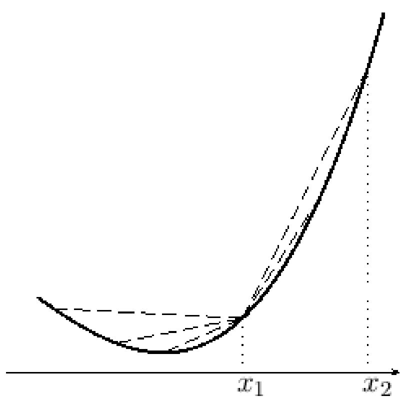



Funkce $g$ popisující směrnice sečen grafu funkce $f$ s jedním krajním bodem $[x_1, f(x_1)]$ je neklesající.

$$g : h \mapsto \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}, h \in (a-x_1, b-x_1)$$

Odtud plyne existence jednostranných limit funkce $g$ v bodě $h = 0$, a tedy jednostranných derivací $f'_+(x_1)$, $f'_-(x_1)$ a nerovnost

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$$




Pro neklesající funkci $g$ a $h_0 > 0$ platí

$$\lim_{h \to 0^+} g(h) \leq g(h_0)$$

Dosazením $h_0 = x_2 - x_1$ dostaneme

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a odtud dále $f'_+(x_1) < +\infty$.

Obdobnými úvahami dostaneme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

a odtud $f'_-(x_2) > -\infty$. Z výše uvedeného pak dostaneme nerovnost

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$$

a vzhledem k tomu, že bod $x \in (a, b)$ můžeme zvolit v roli bodu $x_1$ i bodu $x_2$, dostáváme nerovnosti

$$-\infty < f'_-(x) \leq f'_+(x) < +\infty$$

a z nich konečnost jednostranných derivací. □

**Lemma.** Je-li funkce $f$ konvexní na otevřeném intervalu, pak jsou její jednostranné derivace na tomto intervalu neklesající.

DŮKAZ. Z nerovností (7.1) plyne, že $f'_-$ je neklesající funkce. Pro $x_2$ platí v (7.1) stejná nerovnost jako pro $x_1$, dostáváme tedy

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$$

a odtud plyne, že i $f'_+$ je neklesající funkce. □

## 7.2 Spojitost konvexní funkce

**Věta.** Funkce konvexní na otevřeném intervalu je na tomto intervalu spojitá.

DŮKAZ. Z konečnosti jednostranných derivací plyne jednostranná spojitost a z jednostranných spojitostí plyne spojitost. □

Ve větě je podstatné, že interval je otevřený – viz výše uvedený příklad funkce konvexní a nespojité na uzavřeném intervalu. Z tohoto důvodu se v některé literatuře uvažují konvexní funkce pouze na otevřených intervalech.

## 7.3 První derivace konvexní funkce

**Věta.** Má-li funkce $f$ na otevřeném intervalu $I$ derivaci, pak je na $I$ konvexní právě když je $f'$ neklesající na $I$.

DŮKAZ. Implikace: je-li $f$ konvexní na $I$, pak má na $I$ neklesající derivaci $f'$ plyne z lemmat v článku 7.1.

Dokažme opačnou implikaci: je-li derivace $f'$ neklesající na $I$, pak je $f$ konvexní na $I$. Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Z Lagrangeovy věty plyne existence $x_{12} \in (x_1, x_2)$, $x_{23} \in (x_2, x_3)$ splňujících

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_{12}) \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x_{23})$$

Derivace $f'$ je neklesající na $I$ a $x_{12} < x_{23}$. Odtud plyne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

a odtud plyne, že je $f$ konvexní na $I$.

## 7.4 Druhá derivace konvexní funkce

**Věta.** Má-li funkce $f$ na otevřeném intervalu $I$ druhou derivaci, pak je na $I$ konvexní právě když je $f''$ nezáporná na $I$.

DŮKAZ. Důkaz plyne z předchozí věty a z věty o neklesající funkci a znaménku derivace z článku 4.3. $\square$

## 7.5 Konkávní funkce

**Definice.** Funkci $f$ nazveme *konkávní na intervalu* $I$, pokud je $-f$ konvexní na $I$.

Přímo z definice plyne platnost vět:

**Věta.** Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I$ derivaci. Pak je $f$ na $I$ konkávní právě když je $f'$ na $I$ nerostoucí.

**Věta.** Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I$ druhou derivaci. Pak je $f$ na $I$ konkávní právě když je $f''$ na $I$ nekladná.

## 7.6 Inflexní body

TODO

## 7.7 Řešené příklady

Na příkladech ukážeme použití vět z předchozích článků.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}\exp(x)$, $x \geq 0$
   Spočítáme první derivaci a upravíme do tvaru šikovného pro další derivování
   $$f'(x) = (x^{-1/2}/2 + x^{1/2})\exp(x)$$
   Druhá derivace po úpravě vyjde
   $$f''(x) = (-x^{-3/2}/4 + x^{-1/2} + x^{1/2})\exp(x)$$
   vytkneme $x^{-3/2}$
   $$f''(x) = x^{-3/2}(-1/4 + x + x^2)\exp(x)$$

V bodě $x = 0$ má $f$ nevlastní první a druhou derivaci zprava. V bodech $x > 0$ je $x^{-3/2} > 0$, $\exp(x) > 0$, záleží tedy na znaménku výrazu $-1/4 + x + x^2$. Vyřešením kvadratické nerovnice dostaneme

$$\begin{array}{rcll} f''(x) & > & 0 & \text{pro } x > (\sqrt{2}-1)/2 \\ f''(x) & = & 0 & \text{pro } x = (\sqrt{2}-1)/2 \\ f''(x) & < & 0 & \text{pro } x \in (0, (\sqrt{2}-1)/2) \end{array}$$

Z věty o znaménku druhé derivace pak plyne, že je $f$ konvexní na intervalu $[(\sqrt{2}-1)/2, +\infty)$ a konkávní na intervalu $(0, (\sqrt{2}-1)/2]$. V bodě $x = (\sqrt{2}-1)/2$ má $f$ inflexní bod.

Pomocí věty nelze rozhodnout, zda je funkce $f$ konkávní na intervalu $[0, (\sqrt{2}-1)/2]$ (tedy včetně bodu nula). Načrtněte graf a rozmyslete si, že ze spojitosti plyne odpověď ano.

2. $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
Spočítáme první derivaci a upravíme do tvaru vhodného pro další derivování

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(2x-1)(x^2 - x + 1)^{-2/3}$$

Spočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = \tfrac{2}{3}(x^2 - x + 1)^{-2/3} - \tfrac{2}{9}(2x-1)^2(x^2 - x + 1)^{-5/3}$$

a vytkneme $\frac{2}{9}(x^2 - x + 1)^{-5/3}$

$$f''(x) = \tfrac{2}{9}(x^2 - x + 1)^{-5/3}[3(x^2 - x + 1) - (2x-1)^2]$$

Upravíme výraz v hranaté závorce

$$f''(x) = \tfrac{2}{9}(x^2 - x + 1)^{-5/3}[-x^2 + x + 4]$$

Výraz před hranatou závorkou nabývá kladných hodnot, proto znaménko druhé derivace určíme řešením kvadratické nerovnice. Označíme-li kořeny rovnice $x_1 = (1 - \sqrt{17})/2$, $x_2 = (1 + \sqrt{17})/2$, je

$$\begin{array}{rcll} f''(x) & > & 0 & \text{pro } x \in (x_1, x_2) \\ f''(x) & = & 0 & \text{pro } x \in \{x_1, x_2\} \\ f''(x) & < & 0 & \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \end{array}$$

Z věty o znaménku druhé derivace pak plyne, že je $f$ konvexní na intervalu $[x_1, x_2]$, konkávní na intervalech $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ a v bodech $x_1$, $x_2$ má inflexní body.

3. $f : x \mapsto \exp(\operatorname{tg} x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
Pro výpočet derivací použijeme vzorec $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg}^2 x + 1) \exp(\operatorname{tg} x) \\ f''(x) &= 2 \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \exp(\operatorname{tg} x) + (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 \exp(\operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

Druhou derivaci upravíme – vytkneme $(\operatorname{tg}^2 x + 1) \exp(\operatorname{tg} x)$

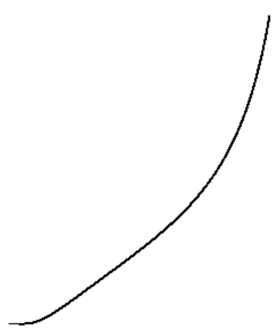
$$f''(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \exp(\operatorname{tg} x)[2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1]$$

a hranatou závorku upravíme na kvadrát dvojčlenu

$$f''(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \exp(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x + 1)^2$$

Z vlastností druhé mocniny a exponenciální funkce plyne nezápornost funkce $f''$ na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Funkce $f$ je tedy na tomto intervalu konvexní.

V bodě $-\pi/4$ je $f''(-\pi/4) = 0$, ale v obou jeho okolích je $f$ konvexní. Proto bod $-\pi/4$ není podle námi přijaté definice inflexním bodem.



Vlevo je graf funkce $f$ na intervalu $[-1.57, 0.8]$, na grafu nejsou osy.
Nulová druhá derivace v bodě $-\pi/4$ se projeví téměř lineárním průběhem funkce $f$ v jeho okolí – graf se hodně podobá úsečce.
Snadno spočítáme, že v tomto bodě je nulová i třetí derivace. Taylorův polynom třetího stupně je tedy ve skutečnosti lineární funkce $T(x) = (2/e)(x + \pi/4) + 1/e$.

Dalším zajímavým bodem je $-\pi/2$. Funkce $f$ v něm není definovaná, ale můžeme ji do něj spojitě rozšířit nulou. Dá se spočítat, že toto spojité rozšíření má v tomto bodě nulovou nejen první a druhou jednostrannou derivaci, ale i jednostranné derivace všech vyšších řádů.

# Kapitola 8

# Řady

*Řada* je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Navíc se v jiných oborech používá pojem *časová řada* ve smyslu posloupnosti. Studentům se tyto pojmy hodně pletou, přestože se už na střední škole setkali s pojmy *geometrická posloupnost*, *geometrická řada*, *aritmetická posloupnost*, *aritmetická řada*. Proto je potřeba si „vtlouci“ do hlavy, že geometrická posloupnost je například $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ zatímco geometrická řada je například $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$, tedy součet.

Uvedeme tři varovné příklady, které nás poučí, že s nekonečnými součty musíme zacházet opatrně.

Uvažujme řadu

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{8.1}$$

a vydělme ji člen po členu dvěma

$$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots . \tag{8.2}$$

Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne (odečteme (8.2) od (8.1))

$$\frac{s_1}{2} = s_1 - \frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots . \tag{8.3}$$

A odtud dostaneme odečtením řady (8.2) od řady (8.3)

$$0 = \frac{s_1}{2} - \frac{s_1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ,$$

a tedy součet kladných čísel je roven nule.

Uvažujme řadu

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s_2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s_2}{2} = s_2 + \frac{s_2}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy a přidanými nulami. Proto platí $s_2 = \frac{3s_2}{2}$.

Uvažujme geometrickou řadu

$$s_3 = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$

a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s_3}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$

Vidíme, že platí $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$, odkud dostaneme $s_3 = -7$.

## 8.1 Základní pojmy

**Definice.** Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme (nekonečnou číselnou) *řadou.*
Čísla $a_k$ nazýváme *členy* řady.
Číslo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazýváme *n-tým částečným součtem* řady a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupností částečných součtů* řady.
Má-li posloupnost částečných součtů limitu $s \in \mathbb{R}^*$, pak říkáme, že má řada součet a $s$ nazýváme *součtem řady.*
Pokud je součet řady konečný, říkáme, že řada *konverguje.*
Pokud je součet řady nekonečný, říkáme, že řada *diverguje.*

V případě, že řada součet nemá, není terminologie úplně jednotná – proto raději budeme říkat, že nemá součet. Někteří používají termín oscilující řada, někteří divergentní řada.

**Poznámky.**

1. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ značí jednak řadu (i když nemá součet) a také její součet (má-li ho).

2. Řada může začínat i jiným indexem než $k = 1$. Například geometrickou řadu $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ zapíšeme $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

3. Změníme-li *konečný* počet členů řady, pak se pravděpodobně změní její součet, ale nezmění se to, zda řada konverguje a zda má součet: Je-li $a_k = b_k$ pro $k \geq N$, pak pro $n \geq N$ je (podrobnosti v následujícím cvičení)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N}(a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$
a odtud $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N}(a_k - b_k) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Proto při zkoumání konvergence řady nemusíme psát meze pro sčítací index $k$ a nevadí nám, že například členy řady $\sum \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$ nejsou pro $k \in \{0, 1, 2\}$ definovány.

Cvičení. Ukažte, že pro řady $\sum a_k$, $\sum b_k$, které mají od indexu $k = N$ stejné členy, tedy pro $k \geq N$ je $a_k = b_k$, platí pro $n \geq N$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N}(a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Návod. Pro obě řady platí
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k$$
a dále platí
$$\sum_{k=N+1}^{n} a_k = \sum_{k=N+1}^{n} b_k$$

**Příklady.**

1. *Geometrická* řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ má pro $q \neq 1$ částečný součet $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (pro $q = 1$ je $s_n = n + 1$) a je konvergentní pro $q \in (-1, 1)$ se součtem $s = \frac{1}{1-q}$. Pro $q \geq 1$ má součet $s = +\infty$, tedy diverguje. Pro $q \leq -1$ nemá součet.

2. *Harmonická* řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ má rostoucí posloupnost částečných součtů, proto má součet. Odhady $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ... dají $s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > 1 + \frac{n}{2}$ a odtud plyne, že součet harmonické řady je $+\infty$.

3. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$ má částečné součty $s_{2n} = -1+2-3+4-\cdots+2n = n$, $s_{2n+1} = s_{2n} - (2n + 1) = -n - 1$, a tedy nemá součet.

4. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ má částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ a součet 1.

U řady v příkladu 3 lze zjistit, že nekonverguje už z toho, jak vypadají její členy s velkými indexy – nesplňují podmínku v následujícím lemmatu. Má-li mít řada konečný součet, musí mít posloupnost jejích členů nulovou limitu:

**Lemma – nutná podmínka konvergence.** Je-li řada $\sum a_k$ konvergentní, má posloupnost jejích členů nulovou limitu: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz. Ze vztahu $s_n = s_{n-1} + a_n$ vyjádříme $a_n = s_n - s_{n-1}$ a z konvergence řady plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$ – obě limity jsou rovny součtu řady. □

Poznámka. Říkáme, že podmínka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ je nutná podmínka konvergence řady. Z její neplatnosti plyne, že řada není konvergentní – například geometrická řada s kvocientem $q \notin (-1, 1)$ nebo řada z příkladu 3. Z její platnosti neplyne nic – například harmonická řada tuto podmínku splňuje, ale není konvergentní.

## 8.2 Základní pravidla manipulací s řadami

V příkladech na začátku kapitoly byly jediné chybné úvahy v počítání s nekonečny. V prvním příkladu neplatí $s_1 - s_1/2 = s_1/2$ ani $s_1/2 - s_1/2 = 0$, protože $s_1 = +\infty$.

V druhém příkladu jsou kupodivu všechny úpravy korektní kromě závěru. Součet řady se skutečně při přerovnání členů může změnit – blíže tento jev budeme zkoumat v článku o přerovnání řad.

Ve třetím příkladu je vše v pořádku až k rovnici $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$. Při jejím řešení jsme udělali chybu v úpravě $s_3 - \frac{8s_3}{7} = -\frac{s_3}{7}$, protože $s_3 = +\infty$.

Ukážeme, že všechny ostatní úpravy jsou v pořádku.

**Lemma o sčítání řady člen po členu a násobení řady člen po členu.** Mají-li řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ součty $a$, $b$, a je-li definován součet $a+b$, pak řada, která je jejich součtem člen po členu $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ má součet $a + b$. Je-li definován součin $ca$, pak má řada $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ součet $ca$.

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o limitě součtu:
$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$
a z věty o limitě součinu: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. □

Poznámky.

1. Pro konvergentní řady je součet $a + b$ a součin $ca$ definován.

2. Terminologie „člen po členu“ se používá spíše v případech, kdy tvrzení podobné tomu v lemmatu neplatí. Například u řad funkcí nemusí být limita součtu rovna součtu limit – pro $s_n(x) = \sin^{2n}(\frac{\pi x}{2})$ je $\lim_{x\to1} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to1} s_n(x) = 1$. Podobně nemusí platit $\sum_{k=1}^{\infty} f'(x) = (\sum_{k=1}^{\infty} f(x))'$. O řadě $\sum_{k=1}^{\infty} f'(x)$ říkáme, že vznikla derivací řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(x)$ člen po členu.

3. Vkládání nul do řad odpovídá vkládání stejných členů do posloupnosti částečných součtů. Má-li například řada $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_3, \ldots$, pak má řada $a_1 + a_2 + 0 + a_3 + \cdots$ posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_2, s_3, \ldots$. Limita posloupnosti částečných součtů se tím nezmění, proto se ani součet řady vložením nul nezmění.

## 8.3 Řady s nezápornými členy

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s nezápornými členy $a_k \geq 0$ má neklasající posloupnost částečných součtů a proto má vždy součet. Ten může být buď konečný, nebo je roven $+\infty$.

Uvedeme několik kritérií, která nám pomohou určit, zda má řada konečný součet. Ve všech tvrzeních předpokládáme, že členy řad jsou nezáporné.

**Věta – srovnávací kritérium konvergence řad.**
Platí-li $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq b_k)$, pak platí

1. Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentní, pak konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
2. Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, pak je i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$.

Důkaz. Z $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq b_k)$ plynou stejné nerovnosti pro částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$: $(\forall n \in \mathbb{N})(s_n \leq r_n)$ a odtud limitním přechodem plyne $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} r_n$, a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, odkud plynou obě tvrzení věty. □

**Příklad.** Ukážeme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverguje. Nabízí se srovnání s řadou $\sum \frac{1}{k(k+1)}$, o které jsme ukázali v článku 8.1, že konverguje. Nerovnost $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^2+k}$ nám nepomůže, potřebujeme opačnou nerovnost. Proto řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ „posuneme“ o jeden člen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ a použijeme nerovnost $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$.

**Věta – limitní srovnávací kritérium konvergence řad.**
Platí-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$ a řada $\sum b_k$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum a_k$.
Platí-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} > 0$ a řada $\sum a_k$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum b_k$.

Důkaz. V definici limity posloupnosti $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ zvolíme $\varepsilon = 1$ – k němu existuje $K$ takové, že pro $k > K$ platí $\frac{a_k}{b_k} < L + 1$. Po úpravě dostaneme $a_k < (L+1)b_k$.
Z konvergence řady $\sum b_k$ plyne konvergence řady $\sum (L+1)b_k$ a ze srovnávacího kritéria plyne konvergence řady $\sum a_k$. Použili jsme poznámku z článku 8.1, že se nezmění konvergence řady při změně konečného počtu jejích členů – nevadí nám tedy, že $a_k < (L+1)b_k$ platí až od indexu $K$.
Druhé tvrzení dostaneme z prvního použitím věty o limitě podílu $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = 1/\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$. □

**Důsledek.** Pokud je $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k \in (0, +\infty)$ – tedy nenulová a konečná – pak řada $\sum a_k$ konverguje právě když konverguje řada $\sum b_k$.

**Příklady.**

1. Řada $\sum \frac{3k}{k^3+k+1}$ konverguje, protože $\frac{3k}{k^3+k+1}/\frac{1}{k^2} = \frac{3k^3}{k^3+k+1} \to 3$ pro $k \to \infty$ a řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje.

2. Řada $\sum \frac{1}{k^3+1}$ konverguje protože $\frac{k^2}{k^3+1} \to 0$ pro $k \to \infty$ a řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje.

3. Řada $\sum \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}$ diverguje protože $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}/\frac{1}{k} = \frac{k}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}} \to +\infty$ pro $k \to \infty$ a řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje.

Další dvě věty používají srovnávací kritérium s geometrickou řadou. K jejich důkazu použijeme následující cvičení.

ÚKOL. Ukažte, že z $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k \le q)$ plyne $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \le a_1 q^{k-1})$.

**Věta – podílové kritérium konvergence řad.** Pokud existuje $q \in (0,1)$ takové, že $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k \le q)$, tak řada $\sum a_k$ konverguje.

DŮKAZ. Tvrzení plyne z konvergence geometrické řady $\sum a_1 q^{k-1}$ a srovnávacího kritéria. $\square$

Častěji budeme používat limitní verzi podílového kritéria.

**Věta – limitní podílové kritérium konvergence řad.**
Pokud je $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, tak řada $\sum a_k$ konverguje.
Pokud je $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, tak řada $\sum a_k$ diverguje.

DŮKAZ. Z $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L < 1$ plyne pro $q = (L+1)/2 < 1$ existence $K$ takového, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k > K$ platí $a_{k+1}/a_k < q$ a odtud plyne tvrzení věty z podílového kritéria.

Z $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L > 1$ plyne existence $K$ takového, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k > K$ platí $a_{k+1}/a_k > 1$ (zvolili jsme $\varepsilon = L - 1 > 0$, pak je $L - \varepsilon = 1$), tedy posloupnost $\{a_k\}_{k=K}^{\infty}$ je rostoucí, a tedy $(\forall k > K)(a_k > a_K)$ a odtud $\lim_{k\to\infty} a_k > a_K$. Zároveň pro dostatečně velké $K$ je $a_K \ne 0$ (jinak by nebyl definován podíl $a_{K+1}/a_K$ a nemohla by existovat limita $a_{k+1}/a_k$ pro $k \to \infty$).

Odtud plyne, že neplatí nutná podmínka konvergence $\lim a_k = 0$, a tedy řada $\sum a_k$ diverguje. $\square$

**Příklady.**

1. Řada $\sum \frac{k^2}{1.1^k}$ konverguje, protože $\frac{(k+1)^2}{1.1^{k+1}}/\frac{k^2}{1.1^k} = \frac{(k+1)^2}{1.1k^2} \to 1/1.1 < 1$ pro $k \to \infty$.

2. Vyjde-li limita rovna jedné, tak z této skutečnosti neplyne nic. Například řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje a řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje a pro obě je limita $a_{k+1}/a_k$ rovna jedné.

## 8.4 Absolutní konvergence řad

**Definice.** Řadu $\sum a_k$ nazveme *absolutně konvergentní*, pokud je konvergentní řada $\sum |a_k|$.

Pro zkoumání absolutní konvergence použijeme kritéria konvergence řad s nezápornými členy.

**Věta.** Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, je řada $\sum a_k$ absolutně konvergentní.

Důkaz plyne přímo z limitního srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy. $\square$

**Věta.** Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak řada $\sum a_k$ není konvergentní.

Důkaz je podobný, jako v případě limitního podílového kritéria pro řady s nezápornými členy. Z $|a_k| > |a_K| > 0$ také plyne, že není splněna nutná podmínka konvergence $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. $\square$

Ukážeme, že z absolutní konvergence řady plyne její konvergence.

**Věta.** Je-li řada $\sum a_k$ absolutně konvergentní, je i konvergentní.

Důkaz. Ukážeme, že je posloupnost částečných součtů $\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\}_{n=1}^\infty$ Cauchyovská – odtud plyne, že je konvergentní.
Zopakujme si definici: posloupnost $\{s_n\}$ je Cauchyovská, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N$ takové, že pro $n > m > N$ platí

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^n a_k\right| < \varepsilon.$$

O posloupnosti $\{\sum_{k=1}^n |a_k|\}_{n=1}^\infty$ předpokládáme, že je konvergentní, tedy i Cauchyovská. Proto platí

$$\left|\sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_k|\right| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

pak plyne $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ a odtud plyne dokazované tvrzení. $\square$

Z věty plyne: zjistíme-li, že je řada absolutně konvergentní, pak víme, že je konvergentní. A zjistitíme-li, že není konvergentní, pak nemůže být ani absolutně konvergentní. Odtud a z kritérií konvergence máme následující důsledek.

**Důsledek.**
Je-li $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, je řada $\sum a_k$ nejen absolutně konvergentní, ale i konvergentní.

O řadě, která konverguje, ale nekonverguje absolutně, mluvíme někdy jako o neabsolutně konvergentní řadě.

## 8.5 Řady se střídavými znaménky

O řadě $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ víme, že není absolutně konvergentní. Ukážeme, že je konvergentní.

Cvičení. Načrtněte graf posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Přemýšlejte přitom o vztahu hodnot (která je větší) $s_n$ a $s_{n+1}$ a podobně o vztahu hodnot $s_n$ a $s_{n+2}$.

Rozmyslete si:

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{2n-1} > s_{2n} < s_{2n+1}$.

2. Vybraná posloupnost se sudými indexy $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a shora omezená členem $s_1$.

3. Vybraná posloupnost s lichými indexy $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a zdola omezená nulou.

4. Rozdíl $s_{2n} - s_{2n-1}$ se blíží k nule pro $n \to \infty$.

5. Z předchozího plyne, že obě vybrané posloupnosti konvergují a jejich limity si jsou rovny.

6. Obě limity jsou rovny i limitě částečných součtů $\{s_n\}$.

7. Pro $n \in \mathbb{N}$ a součet $s$ řady platí $s_{2n} < s < s_{2n+1}$.

Uvedené úvahy lze zobecnit v následující větě.

**Věta - Leibnizovo kritérium konvergence pro řady se střídavými znaménky.** Nechť je $\{a_k\}$ nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum(-1)^{k+1}a_k$ konverguje právě když splňuje nutnou podmínku konvergence $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. V případě konvergence řady máme pro její součet $s$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ odhad $s \in (s_{2n}, s_{2n+1})$.

Hlavní myšlenky důkazu. Ekvivalenci dokazujeme jako dvě implikace. Jedna z implikací je zřejmá: je-li řada konvergentní, pak splňuje nutnou podmínku konvergence.
Důkaz opačné implikace je obdobný předchozím cvičením. Ukáže se, že za uvedených předpokladů mají posloupnosti $\{s_{2n}\}$, $\{s_{2n-1}\}$ limitu a ta je rovna limitě posloupnosti $\{s_n\}$. $\square$

## 8.6 Přerovnání řad

V úvodu kapitoly jsme z řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

dostali úpravami řadu (zde z ní vypouštíme nulové členy)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

se stejnými členy, ale v jiném pořadí.

Budeme říkat, že druhá řada vznikla z první přerovnáním – níže uvádíme definici.

**Definice.** Nechť $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel, která každé přirozené číslo obsahuje právě jednou (posloupnost indexů přerovnané řady). O řadě $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ řekneme, že je *přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Příklad. Výše uvedené přerovnání odpovídá posloupnosti $1, 3, 2, 5, 7, 4, \ldots$.

Pro posloupnost $2, 1, 4, 3, 6, \ldots$ dostaneme z řady $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots$ přerovnáním řadu $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + \cdots$.

Obecně se při přerovnání řady může změnit její součet, nebo dokonce přerovnaná řada nemusí mít součet. V následujících článcích rozebereme, jak tato vlastnost souvisí s absolutní konvergencí řady.

### 8.6.1 Přerovnání absolutně konvergentní řady

Nejdříve ukážeme, že řada s nezápornými členy nezmění svůj součet při přerovnání. Poté totéž ukážeme pro absolutně konvergentní řadu.

**Lemma o přerovnání řady s nezápornými členy.** Nechť je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní řada s nezápornými členy a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je jejím přerovnáním. Pak je i přerovnaná řada konvergentní a řady mají stejný součet.

Důkaz. Ukážeme, že pro $n \to \infty$ se rozdíl $n$-tých částečných součtů obou řad blíží nule. Odtud plyne, že jejich limita je stejná, a to znamená, že mají řady stejný součet.

Označíme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Budeme pracovat s rozdílem $s_n - t_n$ a vztahy vysvětlíme nejdříve na příkladu přerovnané řady $a_3+a_8+a_1+a_2+a_7+\cdots$ – v tomto případě je $|s_5-t_5| = |a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-(a_3+a_8+a_1+a_2+a_7)| = |a_4+a_5-a_7-a_8| \le a_4+a_5+a_7+a_8 \le a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 = s_8-s_3$.

Protože je řada $\sum a_k$ konvergentní, je posloupnost jejích částečných součtů Cauchyovská, a proto k $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$ takové, že pro $n, m > n_0$ platí $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

K tomuto $n_0$ zvolíme $n_1$ takové, že členy $a_1, \ldots, a_{n_0}$ jsou zahrnuty v přerovnané řadě $b_1, \ldots, b_{n_1}$. Pro rozdíl $s_{n_1} - t_{n_1}$ pak platí $|s_{n_1} - t_{n_1}| \le s_m - s_{n_0}$ pro dostatečně velké $m$. Odtud plyne $|s_{n_1} - t_{n_1}| < \varepsilon$.

Protože můžeme $\varepsilon$ zvolit libovolně malé, je rozdíl $|s_n - t_n|$ pro dostatečně velké indexy libovolně malý, a proto jsou součty obou řad stejné. □

Před důkazem věty o přerovnání absolutně konvergentní řady zavedeme značení: $a^+$ pro kladnou část čísla $a$, $a^-$ pro zápornou část čísla $a$. Například $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $-3^+ = 0$, $-3^- = 3$. Obecně pro $a \ge 0$ je $a^+ = a$, $a^- = 0$ a pro $a < 0$ je $a^+ = 0$, $a^- = -a$. V dalším budeme používat vztahy $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a z nich odvozené vztahy $a^+ = (a + |a|)/2$, $a^- = (a - |a|)/2$.

**Věta o přerovnání absolutně konvergentní řady.** Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní řada a řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ je jejím přerovnáním. Pak je i přerovnaná řada absolutně konvergentní a řady mají stejný součet.

Důkaz. Nechť je $\sum a_k$ absolutně konvergentní řada. Uvažujme řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$. Z konvergence řad $\sum |a_k|$, $\sum a_k$ plyne konvergence řad s nezápornými

členy
$$\sum a_k^+ = \sum (a_k + |a_k|)/2 \qquad \sum a_k^- = \sum (a_k - |a_k|)/2.$$
Přerovnejme podle posloupnosti indexů $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ obě řady – dostaneme řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^+$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^-$ – mají stejný součet jako před přerovnáním. Z nich pak dostaneme přerovnanou řadu
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^-$$
se součtem stejným jako řada $\sum a_k$. □

Poznámka o součinu řad. Součin řad $s = (\sum a_k)(\sum b_k)$ se nabízí napsat jako dvojnou sumu $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l$ (pro konečné řady ji získáme roznásobením – distributivním zákonem). Je otázka, zda má tato „dvojná“ řada součet a zda je roven součinu $s$. Odpověď zní ano pro absolutně konvergentní řady a součin často zapisujeme v tzv. *Cauchyově tvaru* $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

### 8.6.2 Přerovnání neabsolutně konvergentní řady

V případě neabsolutně konvergentní řady se přerovnáním může její součet změnit, nebo můžeme dostat řadu, která součet nemá. V následující větě ukážeme, že dokonce součet může nabývat jakékoliv hodnoty.

**Věta.** Nechť $\sum a_k$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak pro libovolné $S \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání řady $\sum a_k$ na řadu se součtem $S$.

Hlavní myšlenky důkazu. Použijeme značení $a^+$, $a^-$ z článku o přerovnání absolutně konvergentní řady. Obě řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ mají limitu $+\infty$. Je-li $S$ konečné kladné, začneme s kladnými členy řady, dokud nebude částečný součet větší než $S$. Je-li $S$ konečné záporné, začneme se zápornými členy řady, dokud nebude částečný součet menší než $S$. Pak budeme vždy brát střídavě potřebné množství kladných/záporných členů, abychom se s částečným součtem dostali nad/pod $S$ (řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ mají nekonečný součet, proto nám slouží jako hrneček v pohádce hrnečku vař). Zbývá ukázat, že takto sestrojená řada má součet a ten je roven $S$.

Je-li $S = +\infty$, budeme postupovat podobně – budeme se postupně dostávat nad 1, pod 1, nad 2, pod 2, ..., nad $k$, pod $k$, ....

Podobně pro $S = -\infty$. □

## 8.7 Eulerovo číslo

Ukážeme, že základ přirozených logaritmů, Eulerovo číslo $e$, je roven součtu řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ a limitě $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

### 8.7.1 Eulerovo číslo jako součet řady

Použijeme Taylorův polynom exponenciální funkce $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$. Pro $x = 1$ dostáváme $T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ a pomocí Lagrangeova zbytku Taylorova polynomu

$$e = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} + \tfrac{1}{(n+1)!}\exp(c_n)$$

O čísle $c_n$ víme $c_n \in (0,1)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\exp(c_n) = 0$ a odtud

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tag{8.4}$$

### 8.7.2 Eulerovo číslo jako limita posloupnosti

Ukážeme obě nerovnosti $(1+\frac{1}{n})^n \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $(1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Odtud pak plyne

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \tag{8.5}$$

**Úloha.** Použitím binomické věty a následnou úpravou ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = 1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\dots+\tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n}) \tag{8.6}$$

Z (8.6) dostaneme nahrazením závorek jedničkami nerovnost

$$(1+\tfrac{1}{n})^n < \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \tag{8.7}$$

a odtud limitním přechodem

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \le \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

Ukážeme opačnou nerovnost. Nabízí se v (8.6) udělat limitní přechod pro $n \to \infty$. Nemáme ale nástroj na úpravu limity součtu

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 + 1 + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{3!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n})\big)$$

na součet limit

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 + 1 + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n})\big) + \lim_{n\to\infty} \big(\tfrac{1}{3!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})\big) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \big(\tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n})\big),$$

protože se počet sčítanců na pravé straně s rostoucím $n$ zvětšuje.

Proto zvolíme $N \in \mathbb{N}$ a součet v (8.6) ukončíme pro $n > N$ u členu $\frac{1}{N!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{N-1}{n})$ a dostaneme (pro $n > N$)

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \geq 1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{N!}(1-\tfrac{1}{n}) \ldots (1-\tfrac{N-1}{n}) \quad (8.8)$$

Nyní můžeme v (8.8) provést limitní přechod pro $n \to \infty$ a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{k!}$$

a odtud dalším limitním přechodem pro $N \to \infty$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

### 8.7.3 Eulerovo číslo je iracionální

Předpokládejme, že je Eulerovo číslo racionální, a tedy existují $p, q \in \mathbb{N}$ taková, že $e = \frac{p}{q}$. Použijeme (8.4) k vyjádření součinu $q!\, e$, o kterém z našeho předpokladu plyne $q!\, e \in \mathbb{N}$.

Součet na pravé straně

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

rozdělíme na dvě části a v následujících úlohách ukážeme, že první část má celočíselnou hodnotu a druhá má hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Odtud dostáváme spor s tvrzením $q!\, e \in \mathbb{N}$.

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

**Úkoly.**

1. Ukažte, že pro $k \leq q$ je $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

2. Ukažte, že pro $k > q$ je

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{q!(q+1)\cdots k} \leq \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

   Návod: v součinu $(q+1)\dots k$ nahraďte všechny činitele výrazem $q+1$. Je jich tam $k-q$ (z $k$ činitelů $1 \cdot 2 \cdots k$ vypustíme prvních $q$).

3. Ukažte, že následující řada je geometrická a vypočtěte její kvocient.

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

4. Ukažte, že následující řada je konvergentní a vypočtěte její součet

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

   Návod: dosaďte do vzorce pro součet nekonečné geometrické řady a upravte.

5. Rozmyslete si, že z 2, 4 plyne

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{q!q}$$

6. Ukažte, že pro $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \in (0,1)$$

## 8.8 Mocninné řady

**Definice.**
Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ nazýváme *mocninnou řadou.*
Číslo $x_0$ nazýváme *středem* mocninné řady.

Čísla $a_k$ nazýváme *koeficienty* mocninné řady.
Výrazy $a_k(x-x_0)^k$ nazýváme *členy* mocninné řady.

Bude nás zajímat, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ mocninná řada konverguje.

**Věta o poloměru konvergence mocninné řady.** Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost taková, že posloupnost absolutní hodnoty podílů $\{|a_k/a_{k+1}|\}$ má limitu rovnu $r \in \mathbb{R}^*$.
Pak pro $r = 0$ mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ konverguje pouze pro $x = x_0$.
Pro $r = +\infty$ mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ absolutně konverguje pro $x \in \mathbb{R}$.
Pro $r \in (0, +\infty)$ mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ absolutně konverguje pro $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ a nekonverguje pro $x < x_0 - r$ a pro $x > x_0 + r$.

Důkaz. Poznamenejme, že mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ absolutně konverguje pro $x = x_0$. Pro $x \neq x_0$ použijeme podílové kritérium: $\left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)}{a_k}\right| \to |x-x_0|/r$ pro $k \to \infty$.
Pro $r = 0$ je tato limita (v případě $x \neq x_0$) rovna $+\infty$, tedy řada pro tato $x$ nekonverguje.
Pro $r = +\infty$ je tato limita rovna nule, proto řada absolutně konverguje pro $x \in \mathbb{R}$.
Pro $r \in (0, +\infty)$ má nerovnost $|r(x-x_0)| < 1$ řešení $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ a nerovnost $|r(x-x_0)| > 1$ řešení $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$. $\square$

Poznámky.
Číslo $r$ podobných vlastností má každá mocninná řada – tedy i v případě neexistence limity $|a_k/a_{k+1}|$.
Číslo $r$ těchto vlastností – tedy pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < r$ mocninná řada absolutně konverguje a pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| > r$ mocninná řada nekonverguje nazýváme *poloměrem konvergence* mocninné řady.
Množinu $(x_0 - r, x_0 + r)$ nazýváme *kruhem konvergence* mocninné řady. Termín je více intuitivní v komplexním oboru – množina $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < r\}$ je kruh o poloměru $r$ se středem v bodě $x_0$. Obrázek vysvětlující význam kruhu konvergence najde čtenář v [3] na str. 43 (obrázek 2.1).

## 8.9 Řady, které umíme sečíst

Uvedeme, většinou bez důkazů, příklady řad, které umíme sečíst.

1. Geometrická řada: pro $q \in (-1, 1)$ je $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$.

2. U některých řad je snadné spočítat částečné součty: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, a tedy i součet.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, důkaz v [3] používá funkci komplexní proměnné, její Laurentův rozvoj (zobecnění Taylorova polynomu) a výpočet křivkového integrálu. V úvodu [1] je tento součet odvozen z Taylorovy řady funkce sinus a „zobecnění" vztahu mezi kořeny polynomu a jeho koeficienty na mocninné řady.

4. Derivováním geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ člen po členu dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Vztah $(\sum f_k(x))' = \sum f_k'(x)$ pro nekonečné součty nemusí platit, ale ve speciálním případě mocninných řad platí na kruhu konvergence (věta 8.3.10 v [1]).

5. Alternativní výpočet 4: řadu $\sum_{k=1} kx^k$ vyjádříme jako součet geometrických řad $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x^k$, sečtením dostaneme zase geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x}$, jejíž součet je $\frac{x}{(1-x)^2}$.

6. Víme, že $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, odvodili jsme to odhadem zbytku Taylorova polynomu. Podobně se dá ukázat pro $x \in \mathbb{R}$

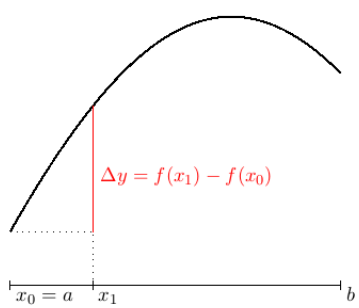
$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

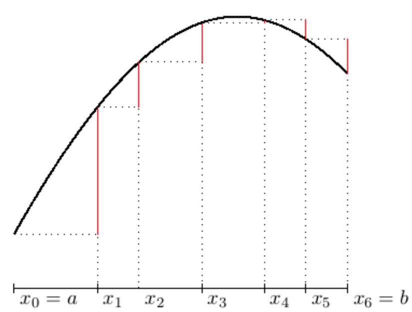
7. Pomocí Lagrangeova zbytku Taylorova polynomu ukážeme, že pro $x \in (-1, 1)$ je $\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Z Abelovy věty [2] plyne, že tento vztah platí i pro $x = 1$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$.

# Kapitola 9

# Integrály

Základní vysokoškolský kurz matematické analýzy se někdy nazývá diferenciální a integrální počet. V diferenciálním počtu se intervaly dělí na malé díly a zkoumá se, jak se na malém dílu mění funkční hodnota. Ústředními pojmy jsou přírůstek funkce a derivace funkce. V integrálním počtu se tyto malé díly skládají zpátky do celku.




Na levém obrázku je červeně vyznačen přírůstek funkce na intervalu $[x_0, x_1]$. Na pravém obrázku jsou vyznačeny postupně přírůstky na intervalech $[x_0, x_1], \ldots, [x_5, x_6]$, na které jsme rozdělili interval $[a, b]$. Přírůstek na intervalu $[a, b]$ je součtem přírůstků na jednotlivých intervalech, přitom přírůstek je pro klesající funkci záporný ($\Delta y < 0$).

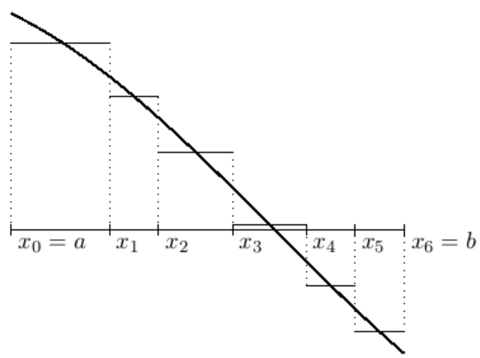
$$f(b) - f(a) = \sum \Delta y \tag{9.1}$$

Pro malé hodnoty přírůstků $\Delta x$, $\Delta y$ je jejich podíl přibližně roven derivaci

$$f'(x) \doteq \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{9.2}$$

Z (9.2) vyjádříme $\Delta y$ a dosadíme do (9.1). Dostaneme

$$f(b) - f(a) \doteq \sum f'(x)\Delta x \tag{9.3}$$




Na dalším obrázku je graf derivace $f'$ na intervalu $[a, b]$ a na jednotlivých intervalech je vyznačena konstantní funkce o hodnotě $\Delta y/\Delta x$, o které víme, že je přibližně rovna hodnotě derivace $f'(x)$. Součet na pravé straně (9.3) je pak roven obsahu plochy mezi grafem derivace $f'$ a osou $x$. Přitom část, ve které je $f'$ záporná, tedy má graf pod osou $x$, bereme se záporným znaménkem.

Integrování je opačná operace od derivování. Funkce $F$, která splňuje vztah $F' = f$ se nazývá *neurčitým integrálem* funkce $f$. Jiný název, kterému budeme v tomto textu dávat přednost, je *primitivní funkce*.

Výše uvedený rozbor grafů funkce a její derivace naznačuje, že obsah obrazce mezi grafem funkce a osou $x$ lze vypočítat jako rozdíl hodnot primitivní funkce v krajních bodech intervalu. Ukážeme později, že je to pravda pro spojitou funkci a naučíme se metody výpočtu primitivní funkce.

Nejdříve ale shrneme v úvodním článku poznatky o obsahu rovinných obrazců. Pak se budeme věnovat Riemannově integrálu, který je definován jako obsah obrazce mezi grafem funkce a osou $x$. Důležitým poznatkem je existence Riemannova integrálu ke spojité funkci a pojem integrálu s proměnnou horní mezí, který je nástrojem důkazu existence primitivní funkce ke spojité funkci.

V závěru kapitoly pojednáváme o Newtonově určitém integrálu a metodách jeho výpočtu. Podstatné je, že pro spojitou funkci mají Riemannův i Newtonův integrál stejnou hodnotu. Přitom pro Newtonův integrál máme metody výpočtu, zatímco geometrické aplikace se dají přirozenějším způsobem spojit s Riemannovým integrálem. Možná stojí za zmínku, že mnozí matematici s tímto tvrzením nesouhlasí a Riemannův integrál nemají příliš v oblibě. I z toho důvodu se zmíníme o některých jeho nedostatcích a o tom, jak je napravuje další typ integrálu, Lebesgueův.

## 9.1 Obsah obrazce

CO JE TO OBSAH? ROZEBRAT PODROBNĚ S OBRÁZKY NÁSLEDUJÍCÍ:
OBSAH ČTVERCE O JEDNOTKOVÉ DÉLCE JE $1j^2$, JAKÝ JE OBSAH OBDÉLNÍKU O STRANÁCH CELOČÍSELNÝCH, RACIONÁLNÍCH, IRACIONÁLNÍCH DÉLEK?
OBSAH TROJÚHELNÍKU, OBSAH MNOHOÚHELNÍKŮ.
OBSAH KRUHU, ELIPSY.
OBSAH OBECNÉHO ROVINNÉHO ÚTVARU, PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET – DOLNÍ A HORNÍ ODHAD OBSAHU.

**Principy**, které používáme při počítání obsahů rovinných obrazců.

1. Obsah obrazce je nezáporné číslo, nebo $+\infty$.
2. Obsah čtverce o hraně délky $1j$ je roven $1j^2$.
3. Obsah obrazce se nezmění při shodném zobrazení, tedy posunutí, otočení a osové souměrnosti. Znamená to, že vzor a obraz mají stejný obsah.
4. Rozdělíme-li obrazec na dvě části, které nemají společné body, je obsah obrazce roven součtu obsahů částí.
5. Část celku má nejvýše takový obsah jako celek.

Principy ve formálním tvaru.

1. Obsah je zobrazení, které množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $o(A) \in [0, +\infty]$.
2. $o([0,1] \times [0,1]) = 1$
3. Pro shodné zobrazení $s$ a $A \subseteq \mathbb{R}^2$ platí $o(A) = o(s(A))$.
4. Pro $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ splňující $A \cap B = \emptyset$ platí
$$o(A \cup B) = o(A) + o(B).$$
5. Pro $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ splňující $A \subseteq B$ platí $o(A) \leq o(B)$.

Z výše uvedených principů plynou další vlastnosti. Uvedeme některé z nich a ukážeme (nebo aspoň naznačíme), jak vlastnosti plynou z výše uvedených principů.

**Vlastnosti.**

1. Zvolíme-li ve třetím principu $A = [0,1] \times [0,1]$, $B = \emptyset$ a použijeme druhý princip, dostaneme $1 = o(\emptyset) + 1$, a tedy

$$o(\emptyset) = 0.$$

*Prázdná množina má nulový obsah.*

2. Je-li $A \subseteq B$ a $o(B) = 0$, pak ze čtvrtého principu plyne $o(A) \leq 0$ a z prvního principu plyne $o(A) \geq 0$, a tedy $o(A) = 0$. *Podmnožina množiny nulového obsahu má také nulový obsah.*

3. Pro množiny $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, které jsou po dvou disjunktní, tedy platí $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$, dostaneme dvojí aplikací třetího pravidla $o(A \cup (B \cup C)) = o(A) + o(B \cup C) = o(A) + o(B) + o(C)$, a tedy

$$o(A \cup B \cup C) = o(A) + o(B) + o(C).$$

*Obsah sjednocení tří množin po dvou disjunktních je roven součtu obsahů množin.*

4. Pro po dvou disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n$ dostaneme matematickou indukcí

$$o(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} o(A_k).$$

*Obsah sjednocení konečného počtu množin po dvou disjunktních je roven součtu obsahů množin.*

5. Nakreslete obrázek množin $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ s nenulovým průnikem, zvolte vhodně množiny po dvou disjunktní a odvoďte z předchozích vztahů

$$o(A \cup B) + o(A \cap B) = o(A) + o(B).$$

*Součet obsahů dvou množin je roven součtu obsahu jejich sjednocení a jejich průniku.*

6. Z předchozího vztahu a s nezápornosti obsahu plyne

$$o(A \cup B) \leq o(A) + o(B).$$

*Obsah sjednocení dvou množin je nejvýše roven součtu jejich obsahů.* Tuto vlastnost nazýváme *subaditivita.*

7. Z předchozího odvodíme $o(A \cup (B \cup C)) \leq o(A) + o(B \cup C)$ a $o(B \cup C) \leq o(B) + o(C)$, a odtud
$$o(A \cup B \cup C) \leq o(A) + o(B) + o(C).$$
*Obsah sjednocení tří množin je nejvýše roven součtu jejich obsahů.*

8. Matematickou indukcí vztah zobecníme pro libovolný konečný počet množin
$$o(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} o(A_k).$$
*Obsah sjednocení konečného počtu množin je nejvýše roven součtu jejich obsahů.*

9. Výše jsme ukázali, že z principů plyne, že obdélník o stranách $a, b \in (0, +\infty)$ má obsah roven $ab$. Ukažme, že (libovolná) jednoprvková množina $A = \{[x, y]\}$ má obsah roven nule. Zvolme $\varepsilon > 0$ a uvažujme čtverec se středem v bodě $[x, y]$ a straně $\sqrt{\varepsilon}$. Jeho obsah je roven $\varepsilon$ a z pátého principu tedy plyne $o(\{[x, y]\}) \leq \varepsilon$. Protože můžeme zvolit $\varepsilon$ libovolně malé, platí
$$o(\{[x, y]\}) = 0$$
*Jednoprvková množina má nulový obsah.*

10. Z nulovosti obsahu jednoprvkové množiny a vlastnosti 4 plyne, že libovolná *konečná množina má obsah roven nule.*

### 9.1.1 Jordanova míra

V minulém článku jsme uvedli vlastnosti, které by mělo splňovat zobrazení, které množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ přiřadí její obsah. Bude nás zajímat, zda vůbec existuje zobrazení takových vlastností definované na množině všech podmnožin množiny $\mathbb{R}^2$.

V tomto článku zkonstruujeme z výše uvedených principů horní a dolní odhad obsahu pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Množiny, pro které se horní odhad rovná dolnímu odhadu, nazveme *Jordanovsky měřitelné* a společnou hodnotu dolního a horního odhadu nazveme *Jordanovou mírou* množiny. Uvedeme příklad množiny, pro kterou se horní a dolní odhad liší.

VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ MÍRA, PŘÍKLAD JORDANOVSKY NEMĚŘITELNÉ MNOŽINY

### 9.1.2 Lebesgueova míra

Víme, že množina racionálních čísel je spočetná. Znamená to, že existuje posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahující všechna racionální čísla. Víme, že konečné množiny jsou Jordanovsky měřitelné a mají míru rovnu nule. Tedy množiny $\cup_{k=1}^{n}\{q_k\}$ jsou všechny Jordanovsky měřitelné a mají nulovou míru. V minulém článku jsme viděli, že jejich sjednocení, tedy množina racionálních čísel, není Jordanovsky měřitelná množina. V teoretických konceptech se často hodí vlastnost

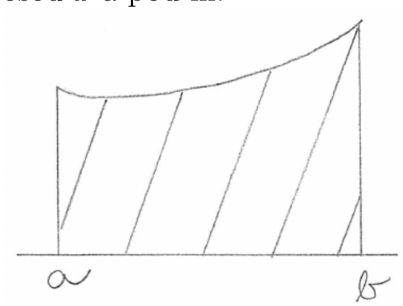
Jsou-li množiny $A_k, k \in \mathbb{N}$ měřitelné,
je měřitelné i jejich sjednocení $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

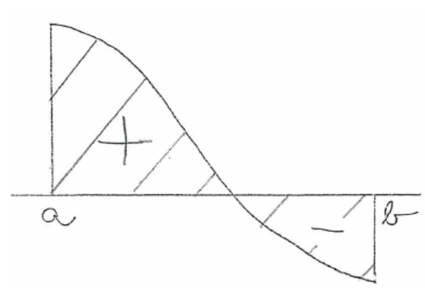
Proto nevystačíme s Jordanovou mírou a zavádíme míru Lebesgueovu.

VNĚJŠÍ LEBESGUEOVA MÍRA, MĚŘITELNÉ MNOŽINY, EXISTENCE NEMĚŘITELNÉ MNOŽINY

## 9.2 Riemannův integrál

Níže budeme definovat Riemannův integrál. Budeme ho definovat pro omezenou funkci na omezeném intervalu. Pro nezápornou funkci má Riemannův integrál význam obsahu obrazce shora omezeného grafem funkce a zdola osou $x$. Pro obecnou funkci je Riemannův integrál rozdílem obsahů obrazců nad osou $x$ a pod ní.



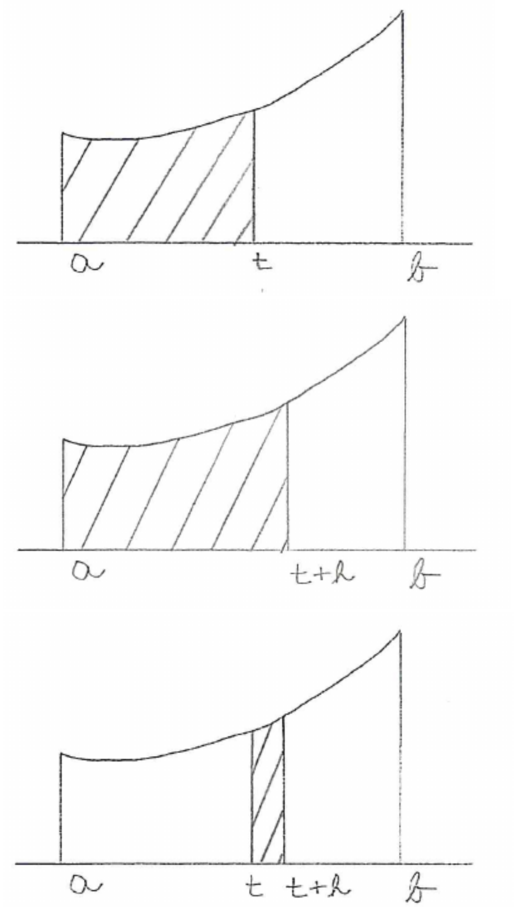




Riemannův integrál budeme definovat (a počítat) pro zadanou funkci na zadaném intervalu. Budeme ho značit symbolem $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f$ značí integrovanou funkci a čísla $a < b$ jsou hranicemi intervalu, přes který integrujeme.

Přímo z definice budeme počítat Riemannův integrál jen z funkcí po částech lineárních (použijeme k tomu prostředky elementární geometrie –

vzorce pro obsah trojúhelníku, obdélníku a lichoběžníku) a jen na začátku, než si vypracujeme nástroje na pohodlnější výpočet.

Pro zadanou funkci $f$ budeme zkoumat funkci, která číslu $t \in (a, b)$ přiřadí integrál s proměnnou horní mezí $R(t) = (\mathcal{R})\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. Na příkladech po částech lineárních funkcí ukážeme, že v bodě $t$, ve kterém je funkce $f$ spojitá, je $R'(t) = f(t)$. Později ukážeme platnost tohoto vztahu pro libovolnou spojitou funkci. Proč tento vztah platí ilustrují následující obrázky.




Na horních obrázcích jsou vyšrafovány plochy o obsazích $R(t)$, $R(t+h)$. Na dolním obrázku má vyšrafovaná plocha obsah rovný rozdílu

$$R(t+h) - R(t)$$

a ten je přibližně roven obsahu obdélníku o šířce $h$ a výšce $f(t)$. Odtud plyne

$$\frac{R(t+h) - R(t)}{h} \doteq f(t)$$

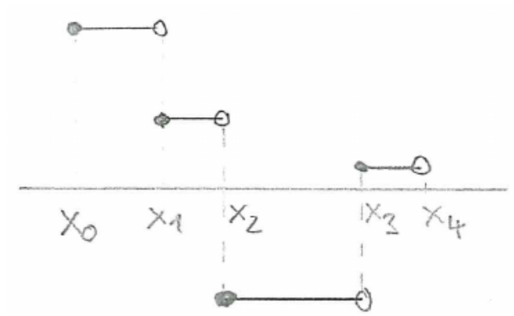
Tato vlastnost nás v následujícím článku povede k pojmu *primitivní funkce funkce* $f$. Je to funkce $F$ splňující $F' = f$.
Probereme metody výpočtu primitivní funkce a v dalším článku pomocí primitivní funkce definujeme Newtonův integrál, jehož hodnota je pro spojité funkce rovna Riemannovu integrálu. Naučíme se tak počítat obsahy obecnějších obrazců.

**Definice.**
*Dělením intervalu* $[a, b]$ nazýváme $n+1$-ici čísel $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, body $x_i$ nazýváme *uzlovými body* dělení.

Je-li $f_1, \dots, f_n$ posloupnost čísel, nazýváme funkci

$$f : x \mapsto f_i \qquad \text{pro } x \in [x_{i-1}, x_i),$$
$$i = 1, \dots, n$$

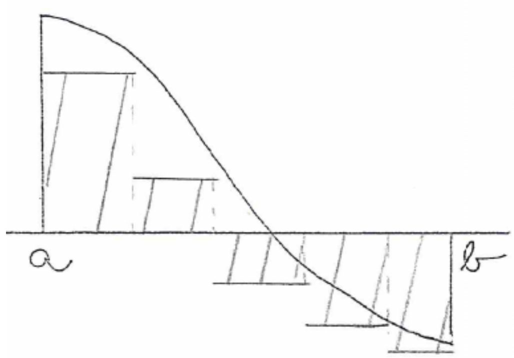
*po částech konstantní funkcí na* $[a, b]$.

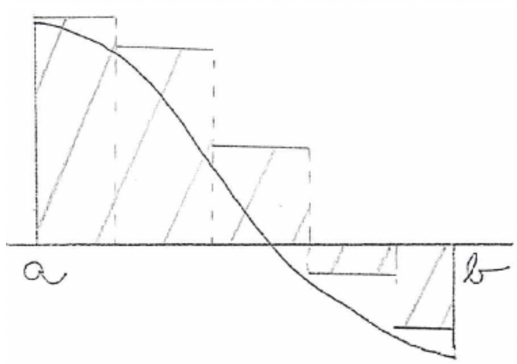



Výraz $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$ nazýváme *Riemannovým integrálním součtem funkce* $f$. Budeme ho značit $\mathcal{R}(f)$.

Nerovností mezi funkcemi budeme rozumět nerovnost funkčních hodnot, přitom uvedeme interval pro proměnnou: $f \leq g$ na $[a, b]$ tedy znamená, že pro všechna $x \in [a, b]$ je $f(x) \leq g(x)$.

Pro funkci $g$ omezenou na intervalu $[a, b]$ definujeme:




Číslo $\mathcal{R}(f)$ pro libovolnou po částech konstantní funkci $f \leq g$ na intervalu $[a, b]$ nazýváme *dolním integrálním součtem* funkce $g$ na intervalu $[a, b]$.

*Dolním Riemannovým integrálem funkce $g$ na intervalu* $[a, b]$ nazýváme supremum dolních integrálních součtů funkce $g$ na $[a, b]$. Značíme ho $(\mathcal{R})\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$.

*Horním integrálním součtem* funkce $g$ na intervalu $[a, b]$ je číslo $\mathcal{R}(f)$ pro libovolnou po částech konstantní funkci $f \geq g$ na $[a, b]$.

*Horním Riemannovým integrálem funkce $g$ na intervalu* $[a, b]$ nazýváme infimum horních integrálních součtů funkce $g$ na $[a, b]$. Značíme ho $(\mathcal{R})\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkci $g$ nazveme *Riemannovsky integrovatelnou na* $[a, b]$, pokud se její horní a dolní Riemannovy integrály na $[a, b]$ rovnají. Jejich společnou hodnotu značíme $(\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a nazýváme *Riemannovým integrálem funkce $g$ na* $[a, b]$.

**Poznámky.**

1. V naší definici je po částech konstantní funkce spojitá zprava. Ve skutečnosti na funkční hodnotě v uzlových bodech dělení nezáleží, Riemannův integrální součet by v tom případě byl definován stejně.

2. Riemannův integrál má smysl počítat jen na omezeném intervalu a jen pro omezené funkce. Je to proto, že ho aproximujeme integrálními součty přes konečný počet omezených intervalů. Na neomezeném intervalu by to nešlo.

   Každá po částech konstantní funkce nabývá konečného počtu hodnot, je tedy omezená. Pro shora neomezenou funkci $f$ by neexistovala po částech konstantní funkce $g$ splňující $f \leq g$. Podobně pro zdola neomezenou $f$ by neexistovala $g$ splňující $f \geq g$.
   TODO: OBRÁZEK

**Vlastnosti.**

1. TODO: OBRÁZEK
   Pro zadaný interval, na něm zadanou funkci, její dolní integrální součet $\mathcal{R}(f_d)$ a horní integrální součet $\mathcal{R}(f_h)$ platí $\mathcal{R}(f_d) \leq \mathcal{R}(f_h)$.

2. Pro funkci $g$ omezenou na intervalu $[a, b]$ platí

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\bar{b}} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.4}$$

   Levá strana je rovna supremu množiny dolních integrálních součtů

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\mathcal{R}(f_d) : f_d \leq f \text{ na } [a, b]\}.$$

   Pravá strana je rovna infimu množiny horních integrálních součtů

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\bar{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\mathcal{R}(f_h) : f_h \leq f \text{ na } [a, b]\}.$$

   Z nerovnosti $\mathcal{R}(f_d) \leq \mathcal{R}(f_h)$ a z lemmatu o supremu a infimu pak plyne nerovnost (9.4). TODO: PŘESNĚJŠÍ ODKAZ NA LEMMA

**Příklady.**

1. $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, rovnoměrné dělení $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. OBRÁZEK, DOLNÍ A HORNÍ INTEGRÁLNÍ SOUČET

2. Dirichletova funkce $D(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ pro $x \notin \mathbb{Q}$ na intervalu $[0, 1]$. Její dolní a horní Riemannův integrály jsou rovny

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{0}}^{1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\mathcal{R})\int_{0}^{\overline{1}} D(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

a není tedy Riemannovsky integrovatelná.

3. Riemannova funkce $R$ je pro $x \notin \mathbb{Q}$ definovaná $R(x) = 0$ a pro racionální číslo $x = p/q$ vyjádřené v nesoudělném tvaru je $R(x) = 1/q$. V [2] je ukázáno, že Riemannova funkce je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0, 1]$ a její integrál je roven nule. Na straně 305 nahoře (elektronicky strana 49) je obrázek zobrazující horní integrální součet o velikosti $\varepsilon$ pro (libovolně) malé $\varepsilon > 0$.

**Lemma o Riemannovsky integrovatelné funkci.** [1] Funkce $f$ je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existují dolní integrální součet $\mathcal{R}(f_d)$ a horní integrální součet $\mathcal{R}(f_h)$ funkce $f$ takové, že $\mathcal{R}(f_h) - \mathcal{R}(f_d) < \varepsilon$.

TODO: OBRÁZEK, DŮKAZ

**Věta o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce.** [2] Je-li funkce $f$ spojitá na intervalu $[a, b]$, pak je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

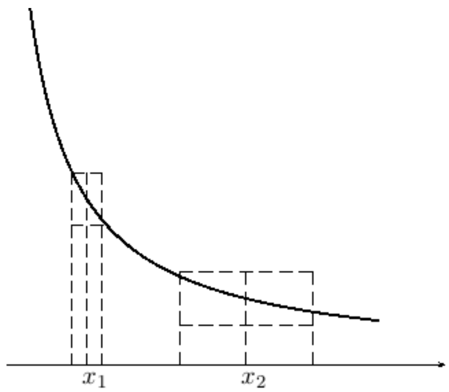
K důkazu potřebujeme pojem stejnoměrné spojitosti.
Spojitost funkce $f$ na intervalu $I$ lze zapsat

$$(\forall x_0 \in I)(\text{funkce } f \text{ je spojitá v bodě } x_0,\ \text{pokud je } x_0 \text{ krajní bod,}$$
$$\text{tak jednostranně zevnitř intervalu})$$

nebo formálněji

$$(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$$

[1] [2], Věta 11.2.12, strana 299, elektronicky 43
[2] [2], Věta 11.2.23, strana 303, elektronicky 47




Na obrázku je graf spojité funkce, která má v bodě vlevo nevlastní limitu.
V bodech $x_1$, $x_2$ jsou vyznačena okolí funkčních hodnot $f(x_1)$, $f(x_2)$ o stejné velikosti $\varepsilon > 0$ a k nim okolí bodů $x_1$, $x_2$ splňující podmínku z definice spojitosti.
Vidíme, že číslo $\delta$ se pro různá $x$ liší. Při zmenšování $x_1$, tedy při jeho posouvání doleva, se velikost $\delta$ dále zmenší.

Tím se liší spojitá funkce od stejnoměrně spojité funkce – u té je k zadanému $\varepsilon$ stejné $\delta$ pro všechna $x$.

**Definice.** Funkci $f$ nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu* $I$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Bez důkazu uvedeme větu o stejnoměrné spojitosti na uzavřeném intervalu[3]. Poznamenejme ještě, že funkce, jejíž graf je na obrázku nahoře, je spojitá na intervalu zleva otevřeném a v levém krajním bodě má nevlastní limitu. Není ji tedy možné do levého krajního bodu spojitě rozšířit.

**Věta.** Je-li funkce $f$ spojitá na omezeném uzavřeném intervalu, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

Důkaz věty o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce.
TODO: DŮKAZ, OBRÁZEK

### 9.2.1 Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

Budeme uvažovat funkci $f$, která má na intervalu $I = [a, b]$ Riemannův integrál a budeme zkoumat funkci

$$R : x \mapsto \begin{cases} (\mathcal{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t & x \in (a, b] \\ 0 & x = a \end{cases} \tag{9.5}$$

[3] [2], Věta 11.1.3, strana 296, elektronicky 40

kterou budeme nazývat *Riemannovým integrálem s proměnnou horní mezí.*

PŘÍKLAD NA VÝPOČET RIEMANNOVA INTEGRÁLU S PROMĚNNOU HORNÍ MEZÍ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCE, SPOJITÉ I NESPOJITÉ A VÝPOČET JEHO DERIVACE

Vlastnosti Riemannova integrálu

1. **Monotonie.**
   Jsou-li $f_1$, $f_2$ funkce splňující $f_1 \leq f_2$ na intervalu $[a, b]$, pak stejná nerovnost platí pro jejich Riemannovy integrály

   $$(\mathcal{R})\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

   TODO: OBRÁZEK

2. **Integrál konstantní funkce** je součinem funkční hodnoty a šířky intervalu. Pro kladnou funkční hodnotu je Riemannův integrál roven obsahu obdélníku mezi grafem funkce a osou $x$. Pro zápornou funkční hodnotu až na záporné znaménko také.
   TODO: OBRÁZEK

3. **Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru.**
   Je-li funkce $f$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a $c \in (a, b)$, pak je $f$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, c]$ i $[c, b]$ a platí

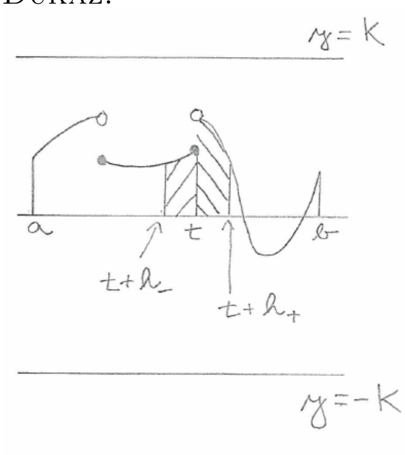
   $$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   TODO: OBRÁZEK

Důsledkem těchto tří vlastností je spojitost Riemannova integrálu jako funkce horní meze a derivace Riemannova integrálu podle horní meze. Viz následující dvě věty.

**Věta o spojitosti Riemannova integrálu s proměnnou horní mezí.** Je-li funkce $f$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, pak je funkce $R$ definovaná v (9.5) je spojitá na $[a, b]$.

DŮKAZ.




Protože je $f$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, je na $[a, b]$ omezená, tedy existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall x \in [a, b])(f(x) \in [-K, K]). \tag{9.6}$$

Na ose jsou vyznačeny body $t + h_-$, $t$, $t + h_+$ a intervaly $[t + h_-, t]$, $[t, t + h_+]$. Číslo $h_+$ je kladné, $h_-$ záporné a obě jsou (v absolutní hodnotě) malá. Funkce $f$ může a nemusí být v bodě $t$ spojitá.

Z aditivity vzhledem k integračnímu oboru plyne pro $h_+ > 0$

$$R(t + h_+) = R(t) + (\mathcal{R})\int_t^{t+h_+} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a pro $h_- < 0$

$$R(t) = R(t + h_-) + (\mathcal{R})\int_{t+h_-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vztahy upravíme na

$$\begin{aligned} R(t + h_+) - R(t) &= (\mathcal{R})\int_t^{t+h_+} f(x)\,\mathrm{d}x \\ R(t) - R(t + h_-) &= (\mathcal{R})\int_{t+h_-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Z (9.6) a z monotonie Riemannova integrálu plyne pro $a \le x_1 < x_2 \le b$ (za $x_1$, $x_2$ budeme dosazovat výše zmíněné body)

$$(\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} -K\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} K\,\mathrm{d}x.$$

Krajní integrály spočítáme jako Riemannovy integrály konstantní funkce

$$-K(x_2 - x_1) \le (\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \le K(x_2 - x_1).$$

Dosazením za $x_1$, $x_2$ dostaneme

$$-Kh_+ \leq (\mathcal{R})\int_t^{t+h_+} f(x)\,\mathrm{d}x \leq Kh_+$$
$$Kh_- \leq (\mathcal{R})\int_{t+h_-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \leq -Kh_-$$

Z věty o třech limitách (jinak známé jako policejní věta) dostaneme, že hodnoty uvedených integrálů se blíží nule pro $h_+ \to 0^+$, $h_- \to 0^-$, a tedy i výrazy na levých stranách rovnic (9.7) se blíží nule.

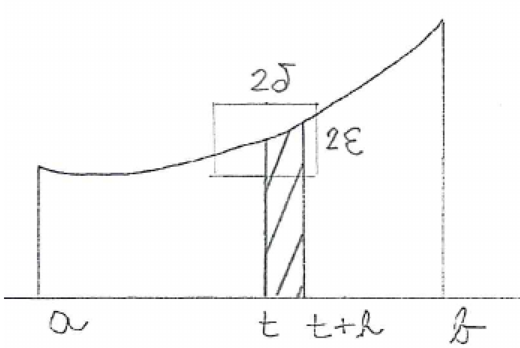
Z $R(t+h_+) - R(t) \to 0$ pro $h_+ \to 0^+$ plyne spojitost funkce $R$ v bodě $t$ zprava.

Z $R(t) - R(t+h_-) \to 0$ pro $h_- \to 0^-$ plyne spojitost funkce $R$ v bodě $t$ zleva.

Výše uvedené vztahy mají smysl pro $t \in (a,b)$. Pro $t = a$ má smysl uvažovat jen $h_+ > 0$. Dostáváme tak spojitost funkce $R$ v bodě $a$ zprava. Podobně dostaneme spojitost zleva v bodě $t = b$. $\square$

**Věta o derivaci Riemannova integrálu spojité funkce podle horní meze.** Je-li $f$ spojitá v bodě $t \in (a,b)$, pak má $R : t \mapsto (\mathcal{R})\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ v bodě $t$ derivaci a platí $R'(t) = f(t)$.

Důkaz.




Protože je funkce $f$ spojitá v bodě $t$, existuje pro kladné $\varepsilon$ kladné $\delta$ takové, že pro $x \in (t-\delta, t+\delta)$ je

$$f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon.$$

Použijeme monotonii Riemannova integrálu na funkci $f$ a konstantní funkce o hodnotách $f(t) \pm \varepsilon$. Dostaneme pro $h \in (0, \delta)$

$$(\mathcal{R})\int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x$$

a pro $h \in (-\delta, 0)$

$$(\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(t) - \varepsilon \,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(x) \,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(t) + \varepsilon \,\mathrm{d}x$$

V obou vztazích je vpravo i vlevo integrál z konstantní funkce. Jeho hodnotu vyjádříme jako součin funkční hodnoty a šířky intervalu

$$\begin{array}{rcccl} h(f(t)-\varepsilon) & \leq & (\mathcal{R})\int_{t}^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq & h(f(t)+\varepsilon) \\ -h(f(t)-\varepsilon) & \leq & (\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq & -h(f(t)+\varepsilon) \end{array}$$

Integrály uprostřed vyjádříme pomocí aditivity Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru jako rozdíl

$$\begin{array}{rcccl} h(f(t)-\varepsilon) & \leq & R(t+h)-R(t) & \leq & h(f(t)+\varepsilon) \\ -h(f(t)-\varepsilon) & \leq & R(t)-R(t+h) & \leq & -h(f(t)+\varepsilon) \end{array}$$

Nyní vydělíme nerovnosti v prvním řádku kladným $h$ a nerovnosti ve druhém řádku kladným $-h$. V obou případech dostaneme

$$f(t)-\varepsilon \ \leq \ \frac{R(t+h)-R(t)}{h} \ \leq \ f(t)+\varepsilon$$

Číslo $\varepsilon > 0$ jsme mohli zvolit libovolně malé a proto je

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(t+h)-R(t)}{h} = f(t)$$

□

V důkazu jsme použili pouze vlastnosti 1. – 3. Riemannova integrálu. Dokázali jsme tedy větu platnou i pro jiné typy integrálů (například Lebesgueův).

**Věta o derivaci integrálu spojité funkce podle horní meze.** Nechť zobrazení, které funkci $f$ a intervalu $I$ přiřadí reálné číslo $O$ má vlastnosti

1. je monotonní vzhledem k proměnné $f$
2. konstantní funkci přiřadí součin její hodnoty a délky intervalu
3. je aditivní vzhledem k proměnné $I$

Číslo $O$ budeme nazývat integrálem funkce $f$ přes interval $I$.

Nechť funkce $f$ je definovaná na intervalu $I$ a spojitá ve vnitřním bodě $t$ intervalu $I$. Zvolme $t_0 \in I$, $t_0 < t$.

Pak funkce, která číslu $x \in I$, $x > t_0$ přiřadí integrál funkce $f$ přes interval $(t_0, x)$, má v bodě $t$ derivaci a ta je rovna $f(t)$.

### 9.2.2 Velmi stručně o Lebesgueově integrálu

### 9.2.3 Nevlastní Riemannův integrál

Napravuje to, že Riemannův integrál je definován jen na omezeném intervalu a pro omezené funkce.

**Definice nevlastního integrálu vlivem meze.** Nechť je $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $b > a$ je funkce $f$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{b \to +\infty} (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce $f$ na intervalu* $[a, +\infty)$ a značíme ho

$$(\mathcal{R}) \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně definujeme nevlastní Riemannův integrál na intervalu $(-\infty, b]$

$$(\mathcal{R}) \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Definice nevlastního integrálu vlivem funkce.** Nechť je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a pro každé $c \in (a, b)$ je funkce $f$ Riemannovsky integrovatelná na $[a, c]$, ale není Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{c \to b^-} (\mathcal{R}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce $f$ na intervalu* $[a, b]$. Značí se obvykle stejně jako Riemannův integrál, tedy

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně pro funkci integrovatelnou na $[c, b]$, ale nikoliv na $[a, b]$ definujeme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to a^+} (\mathcal{R}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.8}$$

**Poznámka.** Vztah (9.8) platí i pro Riemannovsky integrovatelnou funkci, ale je pro něj vlastností, kterou je třeba dokázat, zatímco pro nevlastní integrál je definicí.

## 9.3 Primitivní funkce (neurčitý integrál)

DEFINICE PRIMITIVNÍ FUNKCE NA INTERVALU
LEMMA O JEDNOZNAČNOSTI AŽ NA ADITIVNÍ KONSTANTU
ZNAČENÍ; ZÁKLADNÍ VZORCE

**Vlastnosti.**

1. Linearita:
   Pokud má pravá strana smysl, tak pro funkce $f$, $g$ a číslo $c$ platí

$$\begin{aligned} \int f(x) + g(x) \, \mathrm{d}x &= \int f(x) \, \mathrm{d}x + \int g(x) \, \mathrm{d}x \\ \int c f(x) \, \mathrm{d}x &= c \int f(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Vlastnost plyne z linearity derivace.

2. Spojitost:
   Je-li $F$ funkce primitivní k funkci $f$ na intervalu $I = (a, b)$, pak je $F$ na $I$ spojitá.
   Vlastnost plyne ze vztahu $F'(x) = f(x)$ a z věty spojitosti funkce v bodě, ve kterém má derivaci.

VĚTA O EXISTENCI PRIMITIVNÍ FUNKCE KE SPOJITÉ FUNKCI, NEMUSÍ BÝT ELEMENTÁRNÍ – PŘÍKLADY

## 9.4 Metody výpočtu primitivní funkce

### 9.4.1 Lineární substituce

### 9.4.2 Metoda integrace per partes (po částech)

### 9.4.3 Metoda substituce

### 9.4.4 Integrace parciálních zlomků

1. Jednonásobný reálný kořen

$$\int \frac{1}{x+a} \, \mathrm{d}x = \log|x+a| \qquad \int \frac{1}{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{\log|ax+b|}{b}$$

2. Vícenásobný reálný kořen

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x &= \int (x+a)^{-n}\,\mathrm{d}x = (x+a)^{1-n}/(1-n)\\ &= -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$$

3. Kvadratický trojčlen $x^2+px+q$ s komplexními kořeny (tedy $4q-p^2>0$) a s konstantním čitatelem: nejdřív doplníme na čtverec

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+p/2)^2+q-p^2/4}\,\mathrm{d}x$$

a použijeme vzorec $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

4. Kvadratický trojčlen s jednonásobnými komplexními kořeny a lineárním čitatelem: nejdříve čitatel doplníme na násobek derivace jmenovatele

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a/2(2x+p)+b-ap/2}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

a rozdělíme na dva integrály. První spočítáme substitucí

$$\int \frac{a/2(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q)$$

a druhý jako v předchozím bodě

$$\int \frac{b-ap/2}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

5. Kvadratický trojčlen s násobnými komplexními kořeny: první krok je stejný jako u jednonásobných kořenů

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a/2(2x+p)+b-ap/2}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

První integrál spočítáme substitucí

$$\int \frac{a/2(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$

druhý doplníme na čtverec a použijeme rekurentní formuli

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2an(x^2+a)^n} + \frac{2n-1}{2an}\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kterou níže odvodíme. Začneme per partes na součin $1 \cdot \frac{1}{(x^2+a)^n}$

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{x}{(x^2+a)^n} + n\int \frac{2x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Pokračujeme úpravami

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2(x^2+a)-2a}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x - 2an\int \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pro stručnější vyjádření označme

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

pak je

$$I_{n+1} = \int \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

a výše odvozenou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2anI_{n+1}$$

a odtud vyjádříme $I_{n+1}$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2an(x^2+a)^n} + \frac{2n-1}{2an}I_n$$

6. Alternativní tvar parciálních zlomků v případě násobných komplexních kořenů jmenovatele

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)' &= \frac{-2xn}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\
\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right)' &= \frac{(1-2n)x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

**Příklady.**

1. Na vysvětlení rozdílu standardního a alternativního způsobu najdeme primitivní funkci k funkci
$$\frac{x^3+4x^2}{(x^2+2)^2}$$
Standardní způsob:
$$\frac{x^3+4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$
Multiplikativní konstanty vyjdou $A=1$, $B=4$, $C=-2$, $D=-8$.
Primitivní funkce k $\frac{x+4}{x^2+2}$ je $\frac{1}{2}\log(x^2+2)+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}$.
Primitivní funkce k $\frac{-2x}{(x^2+2)^2}$ je $\frac{1}{x^2+2}$.
Primitivní funkci k $\frac{-8}{(x^2+2)^2}$ najdeme dosazením $n=1$, $a=2$ do rekurentní formule a vynásobením $-8$. Vyjde $\frac{-2x}{x^2+2}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}$.
Výsledná primitivní funkce po sečtení a úpravě vyjde
$$\frac{1}{2}\log(x^2+2)+\frac{1-2x}{x^2+2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}$$
Alternativní způsob:
$$\frac{x^3+4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + C\frac{-2x}{(x^2+2)^2} + D\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$
Multiplikativní konstanty vyjdou $A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=-2$. Výsledná primitivní funkce vyjde stejně jako výše.

2. Vypočítáme ještě jeden integrál, jehož výsledek budeme potřebovat v další kapitole
$$\int \frac{6x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
Použijeme rozklad na parciální zlomky (tedy alternativní způsob)
$$\frac{6x^2}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+1}\right)' + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$
Vyjde $A=-3$, $B=0$, $C=0$, $D=3$ a tedy
$$\int \frac{6x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-3x}{x^2+1} + 3\operatorname{arctg} x.$$

## 9.5 Newtonův (určitý) integrál

**Definice.** Nechť má funkce $f$ na intervalu $(a,b)$ (který může být i omezený i neomezený) primitivní funkci $F$. Pak definujeme *Newtonův integrál funkce $f$ na intervalu* $(a,b)$ vztahem
$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) \tag{9.9}$$
Pokud má pravá strana smysl, říkáme, že *(Newtonův) integrál existuje* nebo také říkáme, že $f$ má na $(a,b)$ Newtonův integrál. Pokud má pravá strana konečnou hodnotu, mluvíme o *vlastním integrálu*, říkáme, že *(Newtonův) integrál konverguje* a funkci $f$ nazýváme *newtonovsky integrovatelnou na* $(a,b)$. Má-li integrál nekonečnou hodnotu, mluvíme o *nevlastním integrálu.*
Rozdíl na pravé straně často značíme $[F(x)]_a^b$ případně $F(x)|_a^b$.

**Poznámky.**

Newtonův integrál nezávisí na výběru primitivní funkce, protože dvě různé primitivní funkce se liší konstantou, která se na pravé straně (9.9) odečte.

V [2] je v definici Newtonova integrálu místo primitivní funkce použita zobecněná primitivní funkce. My z důvodu zjednodušení vystačíme s primitivní funkcí.

**Vlastnosti.**

1. Linearita:
   Pokud má pravá strana smysl, tak pro funkce $f$, $g$ a číslo $c$ platí

$$\begin{aligned}(\mathcal{N})\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x &= (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ (\mathcal{N})\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x &= c\;(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   Vlastnost plyne z linearity neurčitého integrálu a z věty o limitě součtu a násobku.

2. Aditivita vůči integračnímu oboru:
   Pokud má jedna ze stran smysl, tak pro $a < b < c$ platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathcal{N})\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Pro vlastní integrály je vlastnost vidět dosazením do definice. Primitivní funkce je v bodě $b$ spojitá, proto jsou obě jednostranné limity rovny její hodnotě v bodě $b$ a odečtou se. Pro nevlastní integrály si stačí rozmyslet, že limity v bodě $b$ jsou vlastní, a tedy buď mají smysl (jsou definovány) obě strany nebo žádná.
   TODO: NENÍ PRAVDA PRO NAŠI DEFINICI, PROBLÉM JE V EXISTENCI PRIMITIVNÍ FUNKCE V BODĚ $b$

**Věta o integraci per partes.** Jsou-li funkce $f$, $g$ definované na intervalu $[a, b]$ a mají na něm derivaci, pak platí následující vztah za předpokladu, že má jeho pravá strana smysl

$$(\mathcal{N})\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - (\mathcal{N})\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Z pravidla pro derivaci součinu $(fg)' = f'g + fg'$ plyne $f'g = (fg)' - fg'$. Je-li $H$ primitivní funkcí funkce $fg'$, pak je $fg - H$ primitivní funkcí funkce $f'g$. □

Další metodou je substituce. Pro větší přehlednost jí věnujeme samostatný článek.

### 9.5.1 Metoda substituce

#### Derivace složené funkce

Odvození metody substituce je založeno na větě o derivaci složené funkce. Proto ji stručně zopakujeme.

Má-li funkce $g$ v bodě $t$ derivaci $g'(t)$ a funkce $F$ derivaci v bodě $x = g(t)$ rovnu $F'(x)$, pak má složená funkce $t \mapsto F(g(t))$ v bodě $t$ derivaci a ta je rovna $F'(g(t))g'(t)$.

Platí i následující „obrácená" implikace: má-li složená funkce $t \mapsto F(g(t))$ v bodě $t$ derivaci, označíme ji $(F(g(t)))'$ a má-li funkce $g$ v bodě $t$ nenulovou derivaci $g'(t)$, pak je derivace funkce $F$ v bodě $x = g(t)$ rovna podílu $(F(g(t)))'/g'(t)$.

V matematických symbolech první implikaci zapíšeme

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(g(t)))' = f(g(t))g'(t)$$

a druhou zapíšeme

$$\text{Je-li } g'(t) \neq 0, \text{ pak} \quad (F(g(t)))' = f(g(t))g'(t) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Podmínku $g'(t) \neq 0$ lze nahradit podmínkou: $g$ je ryze monotonní (tedy rostoucí nebo klesající) na okolí bodu $t$ a funkce $f$ je spojitá v bodě $g(t)$. Označíme-li složenou funkci $t \mapsto F(g(t))$ symbolem $H$ (tedy $H(t) = F(g(t))$), pak lze implikaci přepsat na

$$H'(t) = f(g(t))g'(t) \Rightarrow (H(g^{-1}(x)))' = f(x)$$

Každé z implikací odpovídá v dalším textu jedna z vět o substituci.

#### Přehození mezí

Zatím jsme definovali Newtonův integrál $(\mathcal{N})\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $a < b$. Při integrování substitucí $x = g(t)$ převedeme integrál přes interval $t \in (a, b)$ na interval o krajních bodech $g(a)$, $g(b)$ a chceme se vyhnout diskusi, které z čísel $g(a)$, $g(b)$ je větší a chceme připustit i jejich rovnost. Proto je užitečné definovat pro $a > b$

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathcal{N})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\mathcal{N})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

### Věty o substituci

Uvedeme dvě věty o substituci. Důkaz každé z nich se opírá o jednu z implikací uvedených výše. Věty se liší tím, že u první z nich připouštíme, že k substituční funkci $g$ neexistuje inverzní funkce, u druhé inverzní funkci požadujeme.

Zformulujeme první větu, pak její použití ukážeme na příkladu a za příkladem provedeme důkaz.

**Věta o substituci bez požadavku inverzní funkce.** Nechť má funkce $g$ na intervalu $I = (a, b)$ konečnou derivaci a funkce $f$ je spojitá na $g(I)$. Pak za předpokladu existence integrálu na pravé straně existuje i integrál na levé straně a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = (\mathcal{N})\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.10}$$

**Příklad.** Máme vypočítat integrál

$$(\mathcal{N})\int_0^{3\pi/2} \cos^5 t\,\mathrm{d}t. \tag{9.11}$$

Upravíme ho do tvaru

$$(\mathcal{N})\int_0^{3\pi/2} \cos t(1-\sin^2 t)^2\,\mathrm{d}t$$

a zvolíme substituci $x = g(t) = \sin t$. Intervalu $t \in (0, 3\pi/2) = I$ odpovídá interval $x \in g(I) = (-1, 1]$. Po substituci budeme integrovat funkci $f(x) = (1-x^2)^2$, která je spojitá na $g(I)$. Integrál (9.11) převedeme substitucí na integrál

$$(\mathcal{N})\int_{\sin 0}^{\sin(3\pi/2)} (1-x^2)^2\,\mathrm{d}x,$$

který spočítáme

$$(\mathcal{N})\int_0^{-1} (1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = [x - 2x^3/3 + x^4/5]_0^1 = -8/15.$$

Uvedená věta pak říká, že stejnou hodnotu má i původní nitegrál. Tedy

$$(\mathcal{N})\int_0^{3\pi/2} \cos^5 t\,\mathrm{d}t = -8/15.$$

**Poznámka.** Jak jsme uvedli dříve, substituční funkce $g$ nemusí mít inverzní funkci. Odtud plyne, že krajními body obrazu $g(I)$ intervalu $I$ nemusí být $g(a)$, $g(b)$. V příkladu výše je $g(I) = (-1, 1]$, zatímco $g(a) = 0$, $g(b) = -1$. Přesvědčete se o tom načrtnutím funkce $g$ na intervalu $I$.

Důkaz. Ze spojitosti funkce $f$ na intervalu $g(I)$ plyne existence primitivní funkce $F$ na tomto intervalu (přitom v případě uzavřenosti intervalu $g(I)$ zprava nebo zleva lze funkci $F$ v tomto bodě spojitě rozšířit). Z existence integrálu $(\mathcal{N})\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ dále plyne existence jednostranných limit funkce $F$ v bodech $g(a)$, $g(b)$ – v menším zprava a ve větším zleva. Dále z existence integrálu plyne, že obě tyto limity nemohou být rovny stejnému nekonečnu.

Z věty o derivaci složené funkce plyne, že složená funkce $t \mapsto F(g(t))$ je primitivní funkcí funkce $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ na intervalu $I$.

Z věty o limitě složené funkce plyne rovnost limity funkce $F$ v bodě $a$ zprava a limity funkce $t \mapsto F(g(t))$ v bodě $g(a)$ (jednostranné/oboustranné, pokud je $g(a)$ krajním/vnitřním bodem intervalu $g(I)$). Analogicky pro limity v bodech $b$, $g(b)$.

Odtud pak plyne rovnost obou určitých integrálů v (9.10). $\square$

Stejným způsobem uvedeme druhou větu o substituci. Nejdříve znění věty, pak příklad a na závěr důkaz věty.

**Věta o substituci s inverzní funkcí.** Nechť je funkce $h$ na intervalu $I = (a, b)$ ryze monotonní (tedy rostoucí nebo klesající) a funkce k ní inverzní $g = h^{-1}$ má na $h(I)$ konečnou derivaci. Funkce $f$ nechť je spojitá na $I$. Pak za předpokladu existence integrálu na pravé straně existuje i integrál na levé straně a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.12}$$

**Příklad.** Máme vypočítat integrál

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\,\mathrm{d}x \tag{9.13}$$

Zvolíme substituci $t = h(x) = \sqrt{(x+1)/(2-x)}$, na čtenáři necháme odvození inverzního vztahu $x = g(t) = (2t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ a jeho derivace

$g'(t) = 6t/(t^2+1)^2$. Meze integrálu po substituci jsou $h(-1) = 0$, $h(1) = \sqrt{2}$. Integrál po substituci je

$$(\mathcal{N})\int_0^{\sqrt{2}} \frac{6t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Primitivní funkci jsme spočítali v závěru kapitoly o integraci racionální funkce

$$(\mathcal{N})\int_0^{\sqrt{2}} \frac{6t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-3t}{t^2+1} + 3\operatorname{arctg} t\right]_0^{\sqrt{2}}.$$

Po dosazení vyjde $-\sqrt{2} + 3\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Podle věty o substituci je

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2} + 3\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

Důkaz provedeme nejdříve pro rostoucí funkci. Z existence integrálu na pravé straně (9.12) plyne existence primitivní funkce $H$ k integrované funkci $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ na intervalu $(g^{-1}(a), g^{-1}(b))$ a existence limit funkce $H$ v bodě $g^{-1}(a)$ zprava a v bodě $g^{-1}(b)$ zleva.

Z věty o derivaci složené funkce plyne, že funkce $x \mapsto H(g^{-1}(x))$ je primitivní funkce k funkci $f$ na $(a, b)$.

Z věty o limitě složené funkce pak plyne rovnost limit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(a)^+} H(t)\\ \lim_{x\to b^-} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(b)^-} H(t)\end{aligned}$$

a odtud plyne tvrzení věty pro rostoucí funkci $g$.

Je-li funkce $h$ klesající na intervalu $(a, b)$, a tedy funkce k ní inverzní $h^{-1} = g$ klesající na intervalu $(h(b), h(a))$, odlišuje se důkaz jen v limitách – na pravé straně se zamění limita zprava za limitu zleva

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(a)^-} H(t)\\ \lim_{x\to b^-} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(b)^+} H(t)\end{aligned}$$

$\square$

**Poznámka.** Pro klesající funkci je možné integrál na pravé straně (9.12) napsat ve tvaru

$$(\mathcal{N})\int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(t))|g'(t)|\,\mathrm{d}t$$

a pro obecnou ryze monotonní funkci jako integrál z funkce $t \mapsto f(g(t))|g'(t)|$ přes vzor intervalu $(a,b)$ ve funkci $g^{-1}$. Takový zápis použijeme při popisu substituce v integrálech funkcí dvou a více proměnných. Dvojice čísel nejsou uspořádané, a proto nedefinujeme monotonii funkcí více proměnných.

## 9.6 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu

V následující větě ukážeme, že pro funkci spojitou na omezeném uzavřeném intervalu existují oba integrály a mají stejnou hodnotu. Proto u určitých integrálů ze spojité funkce vynecháváme symbol $(\mathcal{N})$ případně $(\mathcal{R})$ odlišující oba integrály.

**Newtonova – Leibnizova věta.** Nechť je funkce $f$ spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak je Riemannovsky i Newtonovsky integrovatelná a oba integrály mají stejnou hodnotu.

Důkaz. Víme, že funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky intervatelná. Dále víme, že funkce

$$R : x \mapsto (\mathcal{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad x \in (a,b)$$

je primitivní funkcí funkce $f$ na intervalu $(a,b)$ a že

$$\lim_{x\to a^+} R(x) = 0 \qquad \lim_{x\to b^-} R(x) = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud plyne, že je funkce $f$ Newtonovsky integrovatelná na $(a,b)$ a $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Funkce s konečným počtem nespojitostí mají Riemannův integrál a nemají Newtonův integrál v tom zjednodušení, v jakém jsme podali definici Newtonova integrálu v tomto textu. Podle standardní definice, např. v [2] tyto funkce Newtonův integrál mají. My jeho neexistenci obejdeme rozdělením intervalu na sjednocení konečného počtu otevřených intervalů, na kterých je integrovatelná funkce spojitá, výpočtem Riemannova/Newtonnova integrálu na těchto intervalech a jejich následných sečtením.

TODO: PŘÍKLAD PO ČÁSTECH ELEMENTÁRNÍ FUNKCE A JEJÍCH INTEGRÁLŮ

Příkladem funkce Riemannovsky integrovatelné, ale nikoliv Newtonovsky integrovatelné je Riemannova funkce popsaná v článku o Riemannově integrálu.

Příkladem funkce Newtonovsky integrovatelné, ale nikoliv Riemannovsky integrovatelné je logaritmus na intervalu $[0,1]$. Riemannovsky integrovatelná není protože není omezená. Primitivní funkcí k logaritmu je $x \mapsto x(-1+\log x)$ (vypočteme metodou per partes) a Newtonův integrál je konečný, protože jsou konečné limity (první vypočteme L'Hospitalovým pravidlem, druhou dosazením)

$$\lim_{x\to 0^+} x(-1+\log x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} x(-1+\log x) = -1$$

a má hodnotu $-1$.

## 9.7 „Lepení“ primitivních funkcí

Vysvětlíme techniku „lepení“ na výpočtu primitivní funkce k funkci

$$f : x \mapsto \frac{1}{4+\sin x + 2\cos x}.$$

Protože je $f$ spojitá na $\mathbb{R}$, existuje k ní na $\mathbb{R}$ primitivní funkce. Získáme ji jako určitý integrál

$$F : y \mapsto \int_{y_0}^{y} \frac{1}{4+\sin x+2\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na intervalu $x \in (-\pi,\pi)$ s inverzní funkcí $x = 2\operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$.

Potřebujeme vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ pomocí $t$. Naznačíme jeden ze způsobů odvození:
Ze vzorců $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ odvodíme $\operatorname{tg}^2 x = (1-\cos(2x))/(1+\cos(2x))$ a odtud odvodíme $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$.
Ze vzorce $|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$ odvodíme $|\sin x| = |2t|/(1+t^2)$. Z grafů

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $y = \sin x$ plyne, že $\sin x$ a $t$ mají stejné znaménko, a proto je $\sin x = 2t/(1+t^2)$.

Shrneme odvozené

$$\begin{array}{ll} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x = 2 \operatorname{arctg} t \\ x \in (-\pi, \pi) & t \in \mathbb{R} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t^2+1} & \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}$$

Výše uvedenou substitucí vypočítáme integrál pro $y \in (-\pi, \pi)$ a zvolíme $y_0 = -\pi$. Po substituci a úpravě pravé strany vyjde

$$\int_{-\pi}^{y} \frac{1}{2 + \sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} y/2} \frac{2}{2t^2 + 2t + 6} \,\mathrm{d}t$$

Pravou stranu vypočítáme doplněním na čtverec $2t^2 + 2t + 6 = 2(t + 1/2)^2 + 11/2$ a použitím vzorce $(\operatorname{arctg}(t/a))' = 1/(t^2 + a^2)$ pro konstantu $a \neq 0$ a proměnnou $t$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} y/2} \frac{1}{(t+1/2)^2 + 11/4} &= \left[ \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{11}} \right]_{-\infty}^{\operatorname{tg} y/2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{11}} + \frac{\pi}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

Pro $y = \pi$ získáme $F(\pi)$ spojitým rozšířením $F(\pi) = 2\pi/\sqrt{11}$.

Pro $y \in (\pi, 3\pi)$ použijeme aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru

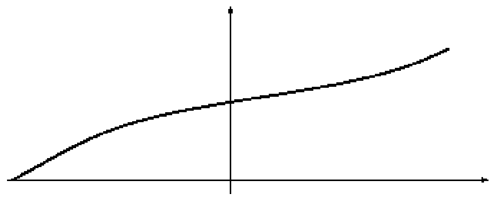
$$\int_{-\pi}^{y} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{y} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

První integrál jsme spočítali výše a u druhého využijeme toho, že integrovaná funkce je periodická a tedy platí

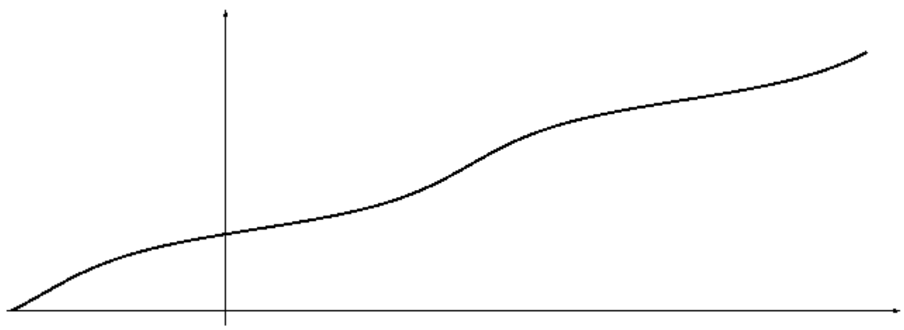
$$\int_{\pi}^{y} \frac{1}{4 + \sin x + 2\cos x} \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{y-2\pi} \frac{1}{4 + \sin x + 2\cos x} \,\mathrm{d}x.$$

Dostaneme pro $y \in (\pi, 3\pi)$ vztah $F(y) = \pi/\sqrt{11} + F(y - 2\pi)$.

Ještě nakreslíme grafy primitivní funkce $F$. Nejdříve na intervalu $(-\pi, \pi)$



a „slepením“ na intervalu $(-\pi, 3\pi)$.



Na větším intervalu bychom slepili více částí.

## 9.8 Co se (zatím) jinam nevešlo

Některé techniky vysvětlíme na integrálu $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

1. Použijeme vzorec pro kosinus dvojnásobného argumentu

   $$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

   Výše uvedený tvar je nejznámější. Další dva tvary z něj odvodíme použitím vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dosadíme $\cos^x = 1 - \sin^2 x$ a po úpravě dostaneme

   $$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

   nebo dosadíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a po úpravě dostaneme

   $$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

   Nám se teď hodí poslední vztah – vyjádříme z něj $\cos^2 x$:

   $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Integrál pak spočítáme

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

2. Použijeme metodu per partes. Zvolíme $f'(x) = \cos x$, $g(x) = \cos x$, dopočítáme $f(x) = \sin x$, $g'(x) = -\sin x$ a dosadíme do pravidla per partes

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Do integrálu vpravo dosadíme ze vzorce $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dostaneme

$$\sin x \cos x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

Vypočteme $\int 1 \, \mathrm{d}x = x$ a dostaneme rovnici

$$\int \cos^2 x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

ze které vyjádříme

$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$$

3. Odvodíme rekurentní vztah pro integrál $\int \cos^n x \, \mathrm{d}x$ metodou per partes. Zvolíme $f'(x) = \cos x$, $g(x) = \cos^{n-1} x$, dopočítáme $f(x) = \sin x$, $g'(x) = -(n-1) \sin x \cos^{n-2} x$ a dosadíme do pravidla per partes

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x$$

V integrálu vpravo dosadíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dostaneme

$$\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x$$

a po úpravě

$$\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) \int \cos^n x \, \mathrm{d}x$$

Označíme $I_n = \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$. Pak je $\int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x = I_{n-2}$ a odvodili jsme pro $n \in \mathbb{R}$ (na vhodných intervalech pro $x$)

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Postupně upravíme

$$nI_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$$

a dostaneme vztah, který nazýváme *rekurentním vztahem*

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Dosadíme $n = 2$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} I_0$$

a protože je $I_0 = \int \cos^0 x \,\mathrm{d}x = x$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$$

Dosazením $n = 4$ dostaneme

$$I_4 = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2$$

a tedy

$$\int \cos^4 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{x}{8}$$

Podobně je $I_1 = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$ a dosazením $n = 3$ dostaneme

$$I_3 = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x$$

### 9.8.1 Integrální kritérium konvergence řad

Budeme zkoumat konvergenci řady pro $\alpha > 0$.

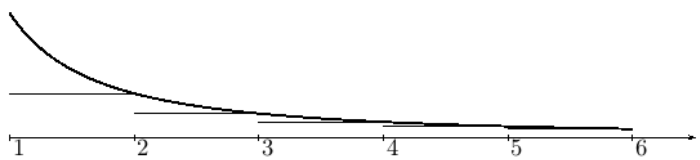
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{9.14}$$

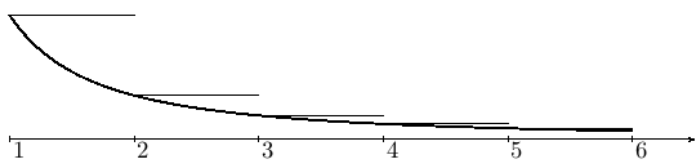
Pro $\alpha = 1$ je (9.14) harmonická řada, o které víme, že má nekonečný součet. Ze srovnávacího kritéria pak dostaneme: pro $\alpha \in (0, 1)$ má řada (9.14) také nekonečný součet.

V kapitole o řadách jsme ukázali, že (9.14) je pro $\alpha = 2$ konvergentní a srovnávací kritérium dá konvergenci i pro $\alpha > 2$.

Zbývá rozhodnout, zda řada konverguje pro $\alpha \in (1, 2)$. Pomůžeme si integrály

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\end{aligned}$$




Na obrázcích je graf funkce $f : x \mapsto 1/x^\alpha$ a grafy po částech konstantních funkcí s hodnotami $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$,. . . .

Z monotonie funkce $f$ plynou nerovnosti mezi $f$ a po částech konstantními funkcemi a odtud a z monotonie určitého integrálu plyne

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Odtud limitním přechodem pro $n \to +\infty$ plyne

$$\frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

a tedy konvergence řady (9.14) pro $\alpha \in (1, +\infty)$.

Zobecněním uvedeného postupu dostaneme důkaz věty.

**Věta – integrální kritérium konvergence řad.** Nechť je funkce $f$ nezáporná a nerostoucí na intervalu $[1, +\infty)$. Pak řada $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ konverguje právě když konverguje integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

## 9.9 Geometrické aplikace integrálu

TODO (na webu je odkaz na samostatný text)

# Kapitola 10

# Dodatek – komplexní čísla

*Algebraický tvar* komplexního čísla je $z = x + iy$. Číslo $x$ nazýváme *reálnou částí* čísla $z$, číslo $y$ *imaginární částí* čísla $z$.

Zavedením polárních souřadnic v rovině získáme *goniometrický tvar* komplexního čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Nezáporné reálné číslo $r$ nazýváme *absolutní hodnotou* komplexního čísla $z$[1]. Číslo $\varphi$ nazýváme *argumentem* čísla $z$. Všimněte si, že argument komplexního čísla není zadán jednoznačně, jednotlivé hodnoty se liší o celočíselný násobek čísla $2\pi$.

**Úloha.** Vyjádřete čísla $1 - i$, $2i$, $\sqrt{3} + i$, $-1$, $0$ v goniometrickém tvaru.

*Komplexně sdruženým* číslem k číslu $z = x + iy$ zapsaném v algebraickém tvaru nazýváme číslo $\overline{z} = x - iy$. Všimněte si, že číslo $z$ a číslo k němu komplexně sdružené $\overline{z}$ mají stejné reálné části a jejich imaginární části se liší znaménkem. Pro reálná čísla platí $z = \overline{z}$ a platí to jen pro reálná čísla. Jinými slovy vztah $z = \overline{z}$ přesně charakterizuje relná čísla. Ještě jinak řečeno, podmínka $z = \overline{z}$ je nutná a postačující pro to, aby $z$ bylo reálné číslo.

**Úloha.** Pro komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ vypočtěte komplexně sdružené číslo jejich součinu $\overline{z_1 z_2}$ a součin čísel k nim komplexně sdružených $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ a ukažte, že se rovnají.
Rozmyslete si, že totéž platí pro součet.

**Úlohy.** Ukažte, že číslo $z$ a číslo k němu komplexné sdružené $\overline{z}$ mají stejnou absolutní hodnotu.
Ukažte, že argumenty čísla $z$ a čísla k němu komplexné sdruženého se liší

[1] Rozmyslete si, že pro $z \in \mathbb{R}$ vyjde tato „komplexní“ absolutní hodnota stejně jako v reálném případě.

znaménkem.
Ukažte, že součin $z\overline{z}$ je roven druhé mocnině absolutní hodnoty čísla $z$.

**Úloha.** Vypočtěte součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru a ukažte, že absolutní hodnota součinu je rovna součinu absolutních hodnot a argument součinu je roven součtu argumentů.

Řešení. Roznásobíme-li závorky

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

dostaneme

$$r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\cos\varphi_2),$$

což použitím součtových vzorců upravíme na

$$r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

**Úloha.** Zvolte si dvě komplexní čísla, zobrazte je v komplexní rovině a pak sestrojte jejich součin. Sestrojený součin porovnejte s vypočteným.

Návod. Použijte předchozí úlohu. K sestrojení úsečky o velikosti $r_1r_2$ použijte podobnost trojúhelníků.

**Úloha.** Nalezněte všechna komplexní čísla, jejichž osmá mocnina je rovna jedné.

Návod. Nejdříve si rozmyslete, jak geometricky získáte osmou mocninu komplexního čísla. Kde zvolíte kompelxní číslo, aby jeho osmá mocnina byla rovna jedné?

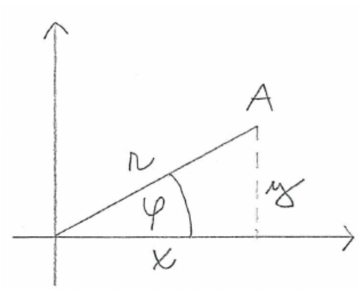
**Úlohy.** Ukažte, že pro dvojici komplexně sdružených čísel $z$, $\overline{z}$ jsou jejich součet i součin reálná čísla.
Ukažte, že pro komplexně sdružené kořeny $z_1$, $z_2$ má po roznásobení součin kořenových činitelů $(z-z_1)(z-z_2)$ reálné koeficienty.

**Úloha.** Ukažte, že pro polynom s reálnými koeficienty $a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ a jeho kořen $z_1$ je $\overline{z_1}$ také kořenem tohoto polynomu.

Návod. Rozmyslete si, že pro polynom s reálnými koeficienty je $\overline{a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4}$ rovno $a_0+a_1\overline{z}+a_2\overline{z}^2+a_3\overline{z}^3+a_4\overline{z}^4$.

# Kapitola 11

# Dodatek – polární souřadnice

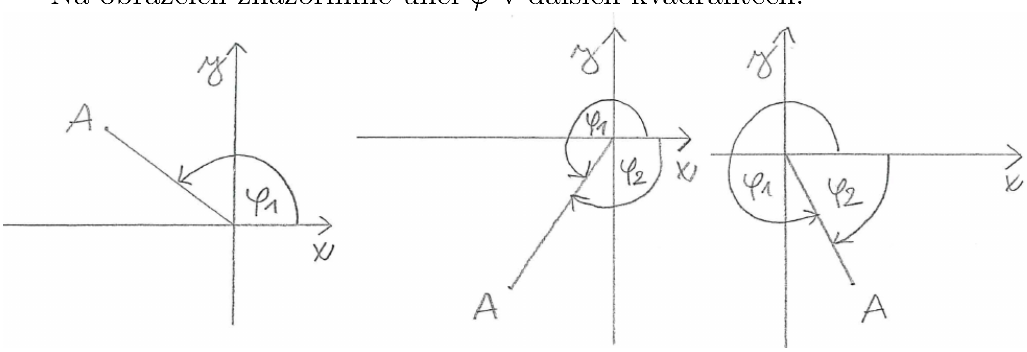



Polární souřadnice bodu $A$ jsou definovány geometricky: $r$ jako vzdálenost bodu $A$ od počátku a $\varphi$ jako úhel orientovaný od kladné poloosy $x$ proti směru hodinových ručiček k průvodiči bodu $A$.

Z pravoúhlého trojúhelníku odvodíme vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi pro bod $A$ v prvním kvadrantu

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \tag{11.1}$$

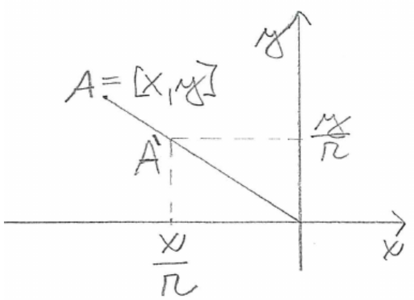
Na obrázcích znázorníme úhel $\varphi$ v dalších kvadrantech.




Souřadnice $\varphi$ nabývá podle výše uvedené definice (úhel orientovaný od kladné poloosy $x$ proti směru hodinových ručiček k průvodiči bodu $A$) hodnot $\varphi \in [0, 2\pi)$ – tomu odpovídají úhly $\varphi_1$. Ve výpočtech je možné použít úhel lišící se o celistvý násobek $2\pi$, například $\varphi_1 - 2\pi$, což je až na znaménko úhel $\varphi_2$. Záporné znaménko odpovídá opačné orientaci úhlu.

Potřebujeme-li například pracovat s polorovinou $x > 0$, hodí se zvolit $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ukážeme, že vztahy (11.1) platí ve všech kvadrantech s výjimkou bodu $O = [0, 0]$, pro který je $r = 0$ a $\varphi$ není definováno.




Na obrázku je kromě bodu $A = [x, y]$ znázorněn bod $A' = [x/r, y/r]$, který leží na jednotkové kružnici. Odtud dostaneme $x/r = \cos\varphi$, $y/r = \sin\varphi$ a odtud platnost (11.1).

Napišme ještě vztahy mezi dvojicí $(x, y)$ a $(r, \varphi)$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Inverzní vztahy jsou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $\varphi$ vyjádřené ze vztahu $\operatorname{tg}\varphi = y/x$. Uvedeme jedno možné vyjádření a pod ním k němu komentář.

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x) & x < 0 \\ \pi/2 & x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 \text{ (nebo } 3\pi/2) & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Funkce arctg je inverzní k funkci tg na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, tomuto intervalu pro $\varphi$ odpovídá polorovina $x > 0$.

Bod $A = [x, y]$ v polorovině $x < 0$ je souměrně sdružený podle počátku s bodem $A' = [-x, -y]$. Zároveň je $(-y)/(-x) = y/x$ a úhly příslušné bodům $A$, $A'$ se liší o $\pi$.

Na kladné poloose $y$ je $\varphi = \pi/2$. Na záporné je buď $\varphi = 3\pi/2$ nebo $\varphi = -\pi/2$.

Pro počátek, tedy $x = y = 0$, není $\varphi$ definováno.

**Úloha.** Znázorněte graficky výše uvedené úvahy: bod $A$, $A'$ a jim příslušné úhly $\varphi$; bod na kladné poloose $y$ a jemu příslušný úhel; bod na záporné poloose a jemu příslušný úhel.

## 11.1 Parametrické rovnice kružnice

Parametrické rovnice kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem $R$ dostaneme dosazením poloměru za souřadnici $R$ a parametru za souřadnici $\varphi$

$$x = R\cos t \qquad y = R\sin t \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{11.2}$$

Přičteme-li k pravým stranám rovnic v (11.2) souřadnice bodu $S = [x_S, y_S]$, dostaneme rovnice křivky posunuté o vektor $\overrightarrow{OS}$, tedy kružnice se středem $S$ a poloměrem $R$

$$x = x_S + R\cos t \qquad y = y_S + R\sin t \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{11.3}$$

**Úloha.** Parametr $t$ v (11.2), (11.3) má význam úhlu. Načrtněte kružnici se středem mimo počátek a k bodu na kružnici vyznačte úhel o velikosti $t$.

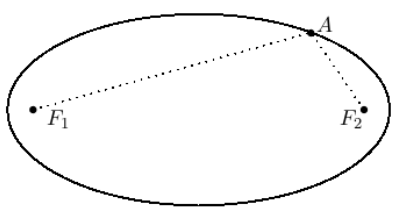
**Úloha.** Zvolte hodnotu úhlu $\varphi$ a načrtněte křivku o parametrických rovnicích

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad r \in [0, +\infty]$$

# Kapitola 12

# Dodatek – rovnice kuželoseček

## 12.1 Elipsa




Elipsa je množina bodů v rovině, které mají součet vzdáleností od dvou daných bodů $F_1$, $F_2$ roven danému číslu $2a$. Body $F_1$, $F_2$ nazýváme ohnisky elipsy. Formálně zapsáno je elipsa množina

$$\{X : |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$$

Označíme-li vzdálenost ohnisek $2e$ a umístíme-li ohniska v kartézské soustavě na osu $x$: $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, dostaneme rovnici elipsy

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \tag{12.1}$$

**Úloha.** Odvoďte z (12.1) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1 \tag{12.2}$$

NÁPOVĚDA. Nejdříve odstraňte úpravami z (12.1) odmocniny. Dostanete rovnici

$$((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2) = (2a^2 - x^2 - e^2 - y^2)^2,$$

kterou přirozenými úpravami převedete na (12.2).

Poznámka. Číslo $e$ nazýváme *excentricitou* elipsy a je rovno polovině vzdálenosti ohnisek elipsy. Číslo $a$ je velikost hlavní poloosy, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ je velikost vedlejší poloosy elipsy.

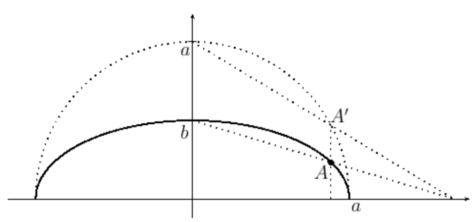
**Úloha.** Načrtněte trojúhelník o vrcholech ve středu elipsy $S$, ohnisku $F$ a vedlejším vrcholu $C$. Zdůvodněte, že je pravoúhlý a jeho odvěsny mají velkost $b$ a $e$. Dále zdůvodněte, že jeho přepona má velikost $a$, a odtud odvoďte rovnici $b^2 + e^2 = a^2$.

Návod. Načrtněte elipsu, její ohniska, spojte je úsečkou, načrtněte osu této úsečky a označte ji $o$. Uvědomte si, že elipsa je souměrná podle osy $o$ a že na ose $o$ leží vedlejší vrcholy elipsy, označte je $C$, $D$. Zdůvodněte, že oba vedlejší vrcholy mají od ohnisek vzdálenost $a$: $|CF_1| = |CF_2| = |DF_1| = |DF_2| = a$.

## 12.2 Parametrické rovnice elipsy

Do rovnice elipsy (12.2) dosadíme $b^2 = a^2 - e^2$ a vynásobíme $a^2$. Dostaneme

$$x^2 + (ay/b)^2 = a^2 \tag{12.3}$$




Zvolíme na elipse bod $A = [x, y]$ a sestrojíme k němu bod $A' = [x, ay/b]$.

Z rovnice (12.3) plyne, že bod $A'$ leží na kružnici o poloměru $a$. Tuto kružnici nazýváme vrcholovou kružnicí elipsy a její parametrické rovnice jsou

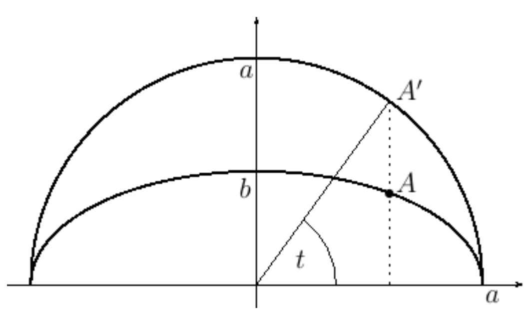
$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Dosazením $ay/b$ za $y$ dostaneme parametrické rovnice elipsy

$$x = a\cos t \qquad ay/b = a\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$$

a po úpravě

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{12.4}$$




Na obrázku je znázorněn úhel $t$ odpovídající bodu $A$ elipsy.

**Úloha.** Vyjádřete $\cos t$ a $\sin t$ z (12.4) a dosaďte do vztahu $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Dostanete rovnici $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

## 12.3 Hyperbola

**Úloha.** Z níže uvedených rovnic vyjádřete $\cosh t$ a $\sinh t$ a dosaďte do $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Jakou křivku parametrické rovnice popisují?

$$x = a \cosh t \qquad y = b \sinh t \qquad t \in \mathbb{R}$$

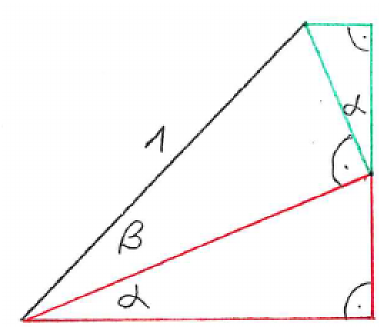
Komentář. Rovnice $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ je rovnice hyperboly. Výše uvedené parametrické rovnice popisují její větev v polorovině $x > 0$ – součin $a \cosh t$ je kladný. Větev v polorovině $x < 0$ popíšeme rovnicemi

$$x = -a \cosh t \qquad y = b \sinh t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Z těchto rovnic je odvozen název hyperbolický sinus a kosinus.

# Kapitola 13

# Dodatek – odvození součtových vzorců




Na obrázku jsou tři pravoúhlé trojúhelníky.

Trojúhelník vlevo nahoře má přeponu délky jedna a odvěsny délek $\sin\beta$, $\cos\beta$.

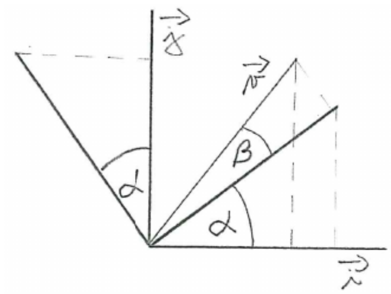
Červený trojúhelník má přeponu délky $\cos\beta$ a odvěsny délek $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$.

Zelený trojúhelník má přeponu délky $\sin\beta$ a odvěsny délek $\sin\alpha\sin\beta$, $\cos\alpha\sin\beta$.

Všimněme si ještě přepony délky jedna. U jejího dolního vrcholu je úhel o velikosti $\alpha+\beta$, můžeme ji tedy doplnit na pravoúhlý trojúhelník s úhlem této velikosti. Jeho odvěsny pak podle obrázku poskládáme z odvěsen menších trojúhelníků a dostaneme součtové vzorce.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{13.1}$$

Výhoda uvedeného odvození je, že je čistě geometrické. Nevýhoda je, že způsob nakreslení trojúhelníků v obrázku není snadno zapamatovatelný. Použijeme-li definici goniometrických funkcí na jednotkové kružnici a k popisu použijeme geometrické vektory a znalosti lineární algebry, dostaneme stejný obrázek přirozeným způsobem.



Na obázku jsou úsečkami vyznačené vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$. Jejich otočením o úhel $\alpha$ vzniknou vektory $\vec{i}'$, $\vec{j}'$. Z pravoúhlých trojúhelníků odvodíme lineární kombinace

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha \\ \vec{j}' &= -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha \end{aligned} \tag{13.2}$$

Vektor $\vec{v}$ vznikne otočením vektoru $\vec{i}'$ o úhel $\beta$

$$\vec{v} = \vec{i}'\cos\beta + \vec{j}'\sin\beta \tag{13.3}$$

Dosazením (13.2) do (13.3) a po úpravě dostaneme

$$\vec{v} = \vec{i}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \vec{j}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \tag{13.4}$$

Vektor $\vec{v}$ dostaneme také otočením vektoru $\vec{i}$ o úhel $\alpha + \beta$, a tedy

$$\vec{v} = \vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}\sin(\alpha+\beta) \tag{13.5}$$

Protože jsou vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$ lineárně nezávislé, je vyjádření v (13.4), (13.5) jednoznačné a odtud dostaneme porovnáním koeficientů součtové vzorce.

**Úloha.** Načrtněte obdobné trojúhelníky jako výše k odvození vzorců

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{13.6}$$

**Úloha.** Odvoďte následující vztahy z (13.1) a vyjádřete z nich $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$. Liší se odvozené vzorce od (13.6)?

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos(\alpha-\beta)\cos\beta + \sin(\alpha-\beta)\sin\beta \\ \sin\alpha &= \sin(\alpha-\beta)\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)\sin\beta \end{aligned} \tag{13.7}$$

NÁPOVĚDA. Do (13.1) dosaďte $\alpha - \beta$ za $\alpha$.
Na (13.7) se dívejte jako na soustavu lineárních rovnic s neznámými $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, napište ji v maticovém tvaru a vyřešte Cramerovým pravidlem.

# Literatura


[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.

[2] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy ii.
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/MA/MA2/Vesely_II.pdf.

[3] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf.