

# Úlohy z goniometrických funkcí

Pro studenty FP TUL

Martina Šimůnková

20. února 2018

1. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit následující funkce na  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{array}{ll} x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x) \\ x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x^2) \\ x \mapsto (\operatorname{arctg}(1/x))^2 & x \mapsto (\operatorname{arccotg}(1/x))^2 \end{array}$$

2. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce  $x \mapsto \operatorname{arccotg} x$  má vlastní limitu v bodě  $+\infty$ . Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.
3. Vypočtete limitu funkce  $f$  v bodě 2.

$$f : x \mapsto \sin \left( \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^3 - 8} \right)$$

4. Vypočtete limitu funkce  $f$  v bodě 3

$$f : x \mapsto \frac{\sin((x^2 - 9)\pi) \cos((x^2 + 9)\pi)}{x^2 - 3x}$$

5. Určete definiční obor elementární funkce  $f$  a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sin x \sqrt{4-x}}{x^2 + 4x}$$

6. Určete definiční obor elementární funkce  $f$  a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sin(1-x^2) \arccos(1-x^2)}{\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})}$$

7. Vypočtete derivaci funkce  $f$  a určete definiční obor obou funkcí:  $f$  i  $f'$ .

(a)

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

(b)

$$f : x \mapsto \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} - 2 \operatorname{arctg} x$$

8. Určete definiční obory a obory hodnot elementárních funkcí.

$$x \mapsto \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} \quad x \mapsto \arcsin \sqrt{1 + x} \quad x \mapsto \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{x + 1}$$

9. Vypočtěte bez použití kalkulačky přibližné hodnoty čísel a poté je porovnejte s hodnotami spočítanými pomocí kalkulačky.

$$\operatorname{tg} 0.2, \quad \arcsin(1 - \sqrt{0.9}), \quad \sqrt{3.9} \arcsin 0.1, \quad \frac{\cos 0.3}{1.2}.$$

10. Načrtněte grafy funkcí a vysvětlete, jak jste k nim došli. Nevíte-li si rady, nechte grafy vykreslit (třeba za použití WolframAlpha) a přemýšlejte nad nimi.

$$\begin{aligned} x \mapsto \sin(\arcsin x) & \quad x \mapsto \arcsin(\sin x) & \quad x \mapsto \cos(\arcsin x) \\ x \mapsto \arcsin(\cos x) & \quad x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) & \quad x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \\ x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) & \quad x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x) \end{aligned}$$

11. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ ,  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arccotg}$ ,

12. Odvoďte ze součtových vzorců další vzorce, např.

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

K odvození potřebujete vztahy  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ , které plynou z geometrické definice.