

Úlohy na integrály III

Pro studenty FP TUL

Martina Šimůnková

10. května 2018

1. Graf funkce f je sjednocením úseček AB , CD (krajní body do grafu funkce nepatří). Načrtněte graf funkce f a prostředky elementární geometrie vypočtěte pro $x \in (0, 2)$ Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t) dt$.

Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0, 2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

(a)

$$A = [0, 2] \quad B = [1, 2] \quad C = [1, -1] \quad D = [2, -1]$$

(b)

$$A = [0, 2] \quad B = [1, 0] \quad C = [1, -1] \quad D = [2, -1]$$

(c)

$$A = [0, 2] \quad B = [1, 0] \quad C = [1, -1] \quad D = [2, 1]$$

2. Načrtněte graf funkce f a pro $x \in (0, 2)$ vypočtěte prostředky elementární geometrie Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t) dt.$$

Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0, 2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t & t \in (0, 1) \\ t & t \in (1, 2) \end{cases}$$

3. Načrtněte množinu M , odhadněte její obsah a vypočtěte ho.

(a)

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 2x - 1 \geq y \geq x^2 + 2x - 2\}$$

(b)

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi/2], y \in [0, \sin x]\}$$

4. Načrtněte větev hyperboly procházející body $[0, 1]$ a $[1, 0]$ s asymptotami v přímkách $x = -1$, $y = -1$. Vyšrafujte „křivočarý trojúhelník“ omezený touto hyperbolou a souřadnými osami, odhadněte jeho obsah a vypočtete ho.