

Úlohy z konvexních funkcí

Pro studenty FP TUL

Martina Šimůnková

13. března 2018

1. Na osu x načrtněte body $a < b < c$. Na ose y zvolte A, C a načrtněte úsečku o krajních bodech $[a, A], [c, C]$. Na této úsečce vyznačte bod $[b, X]$ a vyjádřete X pomocí a, b, c, A, C .
2. Ukažte, že pro všechna reálná čísla $a < b < c, A, B, C$ jsou následující čtyři nerovnosti ekvivalentní. Na obrázku z příkladu 1 ukažte geometrický význam stran nerovnic.

$$\begin{aligned} B &\leq A + (C - A) \frac{b - a}{c - a} \\ \frac{B - A}{b - a} &\leq \frac{C - A}{c - a} \\ \frac{B - A}{b - a} &\leq \frac{C - B}{c - b} \\ \frac{C - A}{c - a} &\leq \frac{C - B}{c - b} \end{aligned}$$

3. Určete definiční obory funkcí f, g a nalezněte intervaly (maximální vzhledem k inkluzi), na nichž jsou tyto funkce konvexní.

$$f : x \mapsto \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad g : x \mapsto \exp(1 + \operatorname{tg} x).$$

4. Napište definici inflexního bodu funkce a uveďte zdroj, odkud jste čerpali. Dále pro každou funkci z příkladu 3 nalezněte inflexní body, nakreslete tečny ke grafu v těchto bodech a napište jejich rovnice.
5. Načrtněte grafy funkcí z příkladu 3; kromě toho, co již máte spočítané, je dobré ještě spočítat nějaké limity.
6. Ukažte, že funkce nerostoucí na intervalu $I = (a, b)$ má v bodě $x_0 \in I$ limitu zprava.
7. Ukažte, že funkce nerostoucí na intervalu $I = (a, b)$ má v bodě $x_0 \in I$ limitu zleva.
8. Ukažte, že funkce neklesající na intervalu $I = (a, b)$ má v bodě $x_0 \in I$ limitu zleva.

9. Ukažte, že funkce neklesající na intervalu $I = (a, b)$ má v bodě $x_0 \in I$ limitu zprava.
10. Načrtněte graf funkce, která je monotonní na intervalu $I = (0, 2)$, ale v některém bodě $x \in I$ nemá limitu.
11. Načrtněte graf funkce, která je monotonní na intervalu $I = (0, 2)$, ale v některém bodě $x \in I$ není spojitá zleva ani zprava.