Úlohy na číselné řady

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
14. dubna 2018

1. Číslo mající dekadický (desetinný) periodický rozvoj $0.\overline{123}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru.

   Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou deseti.

2. Číslo mající binární (dvojkový) periodický rozvoj $0.\overline{010011}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru.

   Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou dvou.

3. Napište prvních šest cifer dekadického a binárního rozvoje zlomku $\frac{5}{7}$. Určete horní odhad chyby, které se dopustíte, když obecné číslo (nemusí to být 5/7) nahradíte jeho konečným desetinným, případně dvojkovým rozvojem o šesti cifrách za „desetinnou“ tečkou.

   Návod: dvojkový rozvoj počítejte obdobně jako desetinný; horní odhad získáte sečtením řad $\sum_k \frac{9}{10^k}$, $\sum_k \frac{1}{2^k}$ začínajících vhodnou hodnotou indexu k.

4. Pro členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $(\forall n \in \mathbb{N})(|a_{n+1}/a_n| \leq q)$.
   Ukažte, že pak platí $(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq |a_1| q^{n-1})$.

5. Pro každou z následujících řad určete, zda je posloupnost jejích částečných součtů monotonní a určete druh monotonie.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^3}{2^k}$$

6. Rozhodněte, které řady z příkladu 5 jsou konvergentní a které jsou absolutně konvergentní.

7. Sečtěte řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k}{k(k+1)(k+2)},$$

8. Použijte limitní srovnávací kritérium, divergentní harmonickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ a konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ ke zjištění konvergence řad (je možné, že pro některou z řad nelze tímto způsobem rozhodnout)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Poté obdobně zjišťujte konvergenci řad v závislosti na hodnotách α, β

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\beta \log k}$$

Pro jaké hodnoty α, β nelze tímto způsobem rozhodnout?
Pro jaké hodnoty zjistíte konvergenci a pro jaké divergenci?
Řešte pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

9. Načrtněte graf posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Přemýšlejte přitom o vztahu hodnot (která je větší) s_n a s_{n+1} a podobně o vztahu hodnot s_n a s_{n+2}. Ukažte, že:

   (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{2n-1} > s_{2n} < s_{2n+1}$.

   (b) Vybraná posloupnost se sudými indexy $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a shora omezená členem s_1.

   (c) Vybraná posloupnost s lichými indexy $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a zdola omezená nulou.

   (d) Rozdíl $s_{2n} - s_{2n-1}$ se blíží k nule pro $n \to \infty$.

   (e) Z předchozího plyne, že obě vybrané posloupnosti konvergují a jejich limity si jsou rovny.

   (f) Obě limity jsou rovny i limitě částečných součtů $\{s_n\}$.

   (g) Pro součet řady s a přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí odhady $s \in (s_{2n}, s_{2n+1})$.

10. V následujících úlohách jsou k, q přirozená čísla.

(a) Ukažte, že pro $k \leq q$ je $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

(b) Ukažte, že pro $k > q$ je

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{q!(q+1)\cdots k} \leq \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

Návod: v součinu $(q+1)\ldots k$ nahraďte všechny činitele výrazem $q+1$.

(c) Sečtěte geometrickou řadu

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

(d) Ukažte, že platí

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{q!q}$$

(e) Ukažte, že pro $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \in (0,1) \qquad \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \notin \mathbb{N}$$