Úlohy na Taylorův polynom

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
22. března 2018

1. Nalezněte čísla a, b, c, d, pro která se rovnají polynomy P, Q.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 - x + 3x^2 + x^3 \\ Q(x) &= a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 \end{aligned}$$

2. (a) Vypočtěte Taylorův polynom čtvrtého stupně funkce f v bodě dva. Poté proveďte zkoušku úpravou Taylorova polynomu.

$$f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + 6x.$$

   (b) Nalezněte polynom následujícím způsobem: do $x^4 - 2x^3 + 6x$ dosaďte za x výraz $2 + t$ a roznásobte závorky (použijte binomickou větu). Do výsledku vraťte $x - 2$ za t (a už neupravujte).

3. Vypočtěte Taylorův polynom třetího stupně funkce f v bodě jedna.

$$f : x \mapsto \sqrt{x^5}$$

4. Vypočtěte Taylorův polynom pátého stupně v bodě nula funkce f.

$$f : x \mapsto \operatorname{tg} x$$

5. Ukažte, že pro Taylorův polynom $T_{f,x_0,4}$ platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{f,x_0,4}(x)}{(x - x_0)^4} = 0$$

a pro žádný další polynom stupně nejvýše čtvrtého tento vztah neplatí.

6. Pro následující funkce vypočtěte jejich Taylorovy polynomy v bodě nula stupně osmého

   (a)

$$f_1 : x \mapsto \sin(x^2)$$

   (b)

$$f_2 : x \mapsto \cos(x^2)$$

(c)
$$f_3 : x \mapsto -x^2 e^{2x^2}$$

(d)
$$f_4 : x \mapsto (1 + 2x^2)\exp(-2x^2)$$

(e)
$$f_5 : x \mapsto \sin(2x^4)$$

7. Vypočtěte hodnotu šesté derivace funkce f v bodě nula
$$f : x \mapsto \sin(x^2).$$
Návod: použijte Taylorův polynom.

8. Pro funkce
$$g : x \mapsto 2\cos(x) - 5\exp(x)$$
$$f : x \mapsto \cos(x^2) - \exp(-2x^2) - 2x^2$$
   (a) Sestrojte Taylorův polynom šestého stupně v bodě nula,
   (b) Taylorův polynom funkce f použijte k výpočtu limity podílu $f(x)/x^4$ pro $x \to 0$
   (c) Taylorovy polynomy použijte k výpočtu hodnoty šesté derivace funkcí f, g v bodě 0.

9. Odvoďte vztah pro zbytek Taylorova polynomu druhého stupně funkce f se středem v bodě x_0
$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(c)(x - x_0)^3$$
Návod: Použijte třikrát Rolleovu větu o střední hodnotě na funkci F na intervalu $[x_0, x]$, případně $[x, x_0]$. K tomu, abyste Rolleovu větu mohli použít, je třeba nejdříve ukázat, že $F(x) = F(x_0) = 0$ a $F'(x_0) = F''(x_0) = 0$.
$$F : t \mapsto (x - x_0)^3 R_2(t) - (t - x_0)^3 R_2(x)$$

10. Najděte horní odhad chyby, které se pro $x \in (-0.5, 0.5)$ dopustíte, když výraz $\sqrt{1+x}$ nahradíte výrazem $1 + x/2$.

    Návod: uvědomte si, že uvedený polynom je lineární Taylorův polynom v bodě nula funkce $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

11. Najděte horní odhad relativní chyby, které se dopustíte aproximací výrazu $\sin\varphi$ výrazem φ. Přitom φ je v radiánech a dosazujete za něj hodnoty odpovídající úhlu mezi -5 a 5 stupni. Výsledek uveďte v procentech.