Integrování substitucí

Martina Šimůnková, 6. června 2016

Učební text k předmětu Matematická analýza pro studenty FP TUL
Text je v provizorní verzi

Příklad 1. V tomto příkladu si připomeneme princip substituce. Rovnici

$$4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$$

neumíme vyřešit přímo, a tak ji v A převedeme na kvadratickou rovnici, kterou vyřešit umíme. Zpětnou substitucí se pak v C od kořenů pomocné kvadratické rovnice dostaneme ke kořenům naší rovnice.

A. Substitucí $t = 2^x$ převedeme naši (exponenciální) rovnici na kvadratickou rovnici

$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

B. Vyřešíme kvadratickou rovnici: dostaneme $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

C. Vrátíme se k původní rovnici: řešení x_1, x_2 vypočteme ze vztahů $2^{x_1} = 2$, $2^{x_2} = 6$ a dostaneme $x_1 = 1$, $x_2 = \log 6 / \log 2$.

U integrálů je mechanismus obdobný: integrál, který neumíme spočítat přímo, převedeme substitucí na integrál, který spočítat umíme a pak se zpětnou substitucí vrátíme k výsledku původního integrálu.

2. Substituce v integrálu je odvozená od pravidla pro derivaci složené funkce, a proto si toto pravidlo připomeneme. Nejdříve si popíšeme značení, které budeme v dalším textu používat: g bude značit substituční funkci, t její proměnnou a $x = g(t)$ další proměnnou. Intervaly pro tyto proměnné označíme I_t a $I_x = g(I_t)$ a budeme o nich předpokládat, že jsou otevřené. O funkci g budeme předpokládat, že je na I_t prostá a má na I_t vlastní (tj. konečnou) derivaci (říkáme, že je na I_t diferencovatelná).
Pravidlo pro derivování složené funkce:

je-li $F'(x) = f(x)$ na intervalu I_x,
je $(F(g(t)))' = f(g(t))g'(t)$ na intervalu I_t

a i obráceně

Platí v případě f spojité na I_x

je-li $(F(g(t)))' = f(g(t))g'(t)$ na intervalu I_t,
je $F'(x) = f(x)$ na intervalu I_x

nám dá pravidlo o substituci

je-li F primitivní funkcí f na intervalu I_x,
je $F \circ g$, tedy funkce $t \mapsto F(g(t))$ primitivní funkce $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ na intervalu I_t

a i obráceně

je-li $F \circ g$ primitivní funkce $(f \circ g)g'$ na intervalu I_t,
je F primitivní funkce f na intervalu I_x.

Příklad 3.

A. Pro $F(x) = \sin x$ je $f(x) = F'(x) = \cos x$.
Odtud pro lineární funkci $g : t \mapsto at + b$ plyne: $(\sin(at + b))' = a\cos(at + b)$.
Odtud dále plyne: $t \mapsto \sin(at + b)$ je primitivní funkcí $t \mapsto a\cos(at + b)$ na $\mathbb{R}$.
Konečně odtud a z pravidla pro derivaci násobku plyne: $t \mapsto \frac{1}{a}\sin(at+b)$ je primitivní funkcí $t \mapsto \cos(at + b)$ na $\mathbb{R}$.

B. Příklad A lze zobecnit:
Je-li F primitivní funkcí f na $I_x = (x_1, x_2)$ a $a \neq 0$, je $t \mapsto \frac{1}{a}F(at + b)$ primitivní funkcí $t \mapsto f(at + b)$ na $I_t = (\frac{x_1-b}{a}, \frac{x_2-b}{a})$.
Procvičte na hledání primitivních funkcí k funkcím $f_1, \dots, f_5$. Správnost výsledku zkontrolujte jeho zderivováním.

$$f_1(t) = \cos(5t - 2), f_2(t) = \exp(2 - t), f_3(t) = \tfrac{2}{1-3t}, f_4(t) = (t + 1)^3, f_5 = \sqrt{2t - 3}.$$

Na jakých intervalech jste našli primitivní funkce? (Odpověď: $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$; $(-\infty, \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}, \infty)$; $\mathbb{R}$; $(\frac{3}{2}, \infty)$.)

C. Pro $F(x) = \log x$ je $f(x) = F'(x) = \frac{1}{x}$. Odtud plyne: $(\log(g(t)))' = \frac{g'(t)}{g(t)}$.
Odtud plyne: $t \mapsto \frac{g'(t)}{g(t)}$ má na intervalu $g^{-1}((0, \infty))$ primitivní funkci $t \mapsto \log(g(t))$ a na intervalu $g^{-1}((-\infty, 0))$ primitivní funkci $t \mapsto \log(-g(t))$.
Například: $t \mapsto \frac{2t}{t^2+1}$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci $t \mapsto \log(t^2 + 1)$;
$t \mapsto \frac{t^2}{t^3-1}$ má na $(1, \infty)$ primitivní funkci $t \mapsto \frac{1}{3}\log(t^3 - 1)$ a na $(-\infty, 1)$ primitivní funkci $t \mapsto \frac{1}{3}\log(1 - t^3)$.

4. Odstavec 2 při výpočtu integrálů použijeme následovně:

ještě není napsáno

A. Místo integrálu $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$ vypočteme integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a do výsledku dosadíme $x = g(t)$. V tomto případě později upustíme od předpokladu, že je funkce g prostá (všimněte si, že nepotřebujeme ke g inverzní funkci).

B. Místo integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočteme integrál $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$ a do výsledku dosadíme $t = g^{-1}(x)$.

5. Při používání substituce pak zpravidla píšeme

$$\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Na tento vztah se můžeme dívat z několika úhlů pohledu, viz odstavce 6, 7. Symbol $\mathrm{d}x$ často nazýváme diferenciálem proměnné x a analogicky $\mathrm{d}t$ diferenciálem proměnné t.

6. (1) jako pomůcka při substituci v integrálu:
Do $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ dosadíme $g(t)$ za x a za $\mathrm{d}x$ ze vztahu (1).
Podobně: do $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$ dosadíme $\mathrm{d}x$ za $g'(t)\,\mathrm{d}t$ a za $g(t)$ dosadíme x.

7. (1) jako rozdíl „nekonečně blízkých hodnot“:

Při definici Riemannova integrálu rozdělíme interval na menší intervaly a vypočteme dolní (respektive horní) součty jako součty obsahů obdélníků pod a nad grafem funkce (nakreslete si obrázek!). Pro hodně jemné dělení intervalu (tj. dělení na hodně „úzké“ obdélníky) můžeme v těchto intervalech integrovanou funkci považovat za konstantní funkci (chyba, nebo-li nepřesnost, které se tím dopustíme bude malá) a obsah obdélníku vypočteme jako součin funkční hodnoty a šířky intervalu. Rozdíly sousedních uzlů dělení intervalu $x_k - x_{k-1}$ často značíme Δx a v případě dělení na „nekonečně“ malé intervaly rozdíly značíme $\mathrm{d}x$. Symbol $(\mathcal{R})\int$ pak můžeme chápat jako součet „nekonečně mnoha nekonečně malých“ ploch obdélníků.

V minulosti, dříve než byla definována limita pomocí okolí bodu (a odpovídající definice pomocí ε-δ formalismu), matematici zručně nakládali s takovými nekonečně malými čísly, více viz [JV], poznámka 5.1.9, širší kontext v historických poznámkách 5.2.30.

Příklad 8. Na integrál $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\,\mathrm{d}x$ použijeme substituci $x = t^{12}$. Exponent 12 je nejmenší možný, který převede odmocniny na mocniny (s přirozeným exponentem). Dosadíme: $\sqrt{x} = t^6$, $\sqrt[4]{x} = t^3$, $\sqrt[6]{x} = t^2$, $\mathrm{d}x = 12t^{11}\,\mathrm{d}t$. Po úpravě dostaneme

$$\int \frac{6t^5 + 6t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál vypočteme vydělením, dílčí integrál $\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ pak podle příkladu 3.C. Dostaneme

$$\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \operatorname{arctg} t$$

a po zpětné substituci $t = \sqrt[12]{x}$

$$\frac{1}{4}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[6]{x} + \sqrt[12]{x} + \frac{1}{2}\log(\sqrt[6]{x}+1) - \operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}.$$

Ještě uvedeme intervaly, na nichž jsme počítali integrály (tj. primitivní funkce): $x \in (0,\infty)$, $t \in (0,\infty)$.

Příklad 9. Na integrál $\int \frac{2^x - 16^x}{1+4^x}\,\mathrm{d}x$ použijeme substituci $t = 2^x$. Využíváme toho, že pak $16^x = t^4$ a $4^x = t^2$. Vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$ můžeme vypočíst dvojím způsobem. Buď zderivujeme vztah $t = 2^x$ a dostaneme $\mathrm{d}t = 2^x \log 2\,\mathrm{d}x$. Nebo zderivujeme inverzní vztah $x = \frac{\log t}{\log 2}$ a dostaneme $\mathrm{d}x = \frac{1}{t\log 2}\,\mathrm{d}t$. V obou případech po substituci dostaneme integrál

$$\int \frac{1-t^3}{(1+t^2)\log 2}\,\mathrm{d}t.$$

Po výpočtu a zpětné substituci dostaneme výsledek

$$-\frac{1}{2}4^x + \frac{1}{2}\log(4^x+1) + \operatorname{arctg} 2^x.$$

Intervaly, na nichž jsme počítali primitivní funkce jsou $x \in \mathbb{R}$ a $t \in (0,\infty)$.

Příklad 10. Budeme hledat integrály

$$\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{1}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x,\quad \frac{1}{1+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$$

na vhodných intervalech. U všech je možné použít univerzální substituci $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na intervalu $x \in (-\pi, \pi)$, který substituce převede na interval $t \in (-\infty, \infty)$ (nakreslete graf!). Inverzní substituce pak je $x = 2\operatorname{arctg} t$ a $\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ a (v semestrální práci odvozené vzorce) $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
Rozborem definičních oborů integrovaných funkcí zjistíte, že pro druhý a třetí integrál je třeba intervaly pro proměnné zúžit na jeden s případů: $x \in (-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$, $t \in (-\infty, -1)$; $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $t \in (-1, 1)$; $x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $t \in (1, \infty)$.
Po substituci dostaneme integrály

$$\int \frac{(t^2+1)^6}{128t^7}\,\mathrm{d}t, \quad \int \frac{(1-t^2)^6}{(1+t^2)^7}\,\mathrm{d}t, \quad \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \quad \int \frac{1+t^2}{1+2t-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 11. Integrály v příkladu 10 lze spočíst i některou z jednodušších substitucí: $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$.

A. Substituci $t = \sin x$ použijte na integrály typu $\int \cos x f(\sin x)\,\mathrm{d}x$, přitom pamatujte, že sudé mocniny kosinu snadno vyjádříte pomocí t: $(\cos x)^2 = 1 - t^2$.
Integrál $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ lze upravit na $\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ a lze tedy touto substitucí převést na integrál $\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

B. Substituci $t = \cos x$ použijte na integrály typu $\int \sin x f(\cos x)\,\mathrm{d}x$, přitom pamatujte, že sudé mocniny sinu snadno vyjádříte pomocí t: $(\sin x)^2 = 1 - t^2$.
Integrál $\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x$ lze upravit na $\int \sin x(1-\cos^2 x)^3\,\mathrm{d}x$ a lze tedy touto substitucí převést na integrál $\int -(1-t^2)^3\,\mathrm{d}t$.
U této a předchozí substituce není substituce zadána prostou funkcí a je to v pořádku (není to chyba).

C. Substituci $t = \operatorname{tg} x$ použijte v případě, že integrovanou funkci umíte upravit do tvaru, který goniometrické funkce sinus a kosinus obsahuje v sudých mocninách, případně může obsahovat jejich součin $\sin x \cos x$ (jako bychom exponenty sčítali). Použijete vzorce $\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $\sin x \cos x = \frac{t}{t^2+1}$, $x = \operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
Integrál $\int \frac{1}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x$ převedeme substitucí a úpravou na integrál $\int (t^2+1)^2\,\mathrm{d}t$.
Integrál $\frac{1}{1+\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$ převedeme substitucí a úpravou na integrál $\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$.