Písemná část zkoušky z předmětu AN2E
10. května 2019

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

Svůj postup zdůvodněte a přiměřeně komentujte.

1. Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru a případně určete, jakou hodnotou.

$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{arctg}(2-\sqrt{x})\sin(4-x^2)(1-\cos(2x))}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

2. Zjistěte, ve kterých z bodů 0, $\pi/2$, $-\infty$ má funkce f limitu a případně určete její hodnotu.

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{x}$$

3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$f : x \mapsto \arccos\sqrt{1+x+x^2}$$

4. Pro interval $I = [-0.5, 0]$ určete jeho obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto \arccos\sqrt{1+x+x^2}$$

5. Odvoďte derivaci funkce arccos.

6. Napište příslušnou definici limity a pomocí této definice ukažte, že funkce arctg má limitu v mínus nekonečnu.

7. Pomocí lineární aproximace zpřesněte přibližnou hodnotu
$$1/(2+\operatorname{arctg}(1-\sqrt{1.2})) \doteq 0.5$$

8. Napište příslušnou definici limity a pomocí této definice ukažte, že funkce exp má limitu v mínus nekonečnu.

9. Napište příslušnou definici limity a pomocí této definice ukažte, že funkce $x \mapsto \log|x|$ má limitu v mínus nekonečnu.

10. Zjistěte, ve kterých z bodů 0, $+\infty$, $-\infty$ má funkce f limitu a případně určete její hodnotu.
$$f : x \mapsto \frac{x^5}{1-\exp(x)}$$

11. Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru a případně určete, jakou hodnotou.
$$f : x \mapsto \frac{x\log x}{x-\sqrt{2-x}}$$

12. Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru a případně určete, jakou hodnotou.
$$f : x \mapsto \frac{x^3}{\log(1-\sqrt{x})}$$

13. Čísla s dekadickým periodickým rozvojem $2.\overline{62}$ a s binárním periodickým rozvojem $10.0\overline{01}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru a v dekadické soustavě.

    Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodným číslem.

14. Vypočtěte součet řady
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{k^2+5k+4}$$

15. Vysvětlete, proč mají následující řady součet a zjistěte, zda je konečný
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{k}}{3+\sqrt{k^5}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{2^k}$$

15a Vysvětlete, proč má následující řada součet a zjistěte, zda je konečný
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\log k)^2}{k^2}$$

Návod: lze použít integrální kritérium.

15b Vysvětlete, proč mají následující řady součet a zjistěte, zda je konečný

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log k}{\sqrt{k^5}} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log k}{k + \sqrt{k^5}}$$

Návod: lze použít integrální kritérium nebo limitní srovnávací kritérium.

16. Rozhodněte, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou následující řady konvergentní a pro která absolutně konvergentní

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{3k}}{k} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!x^k}{(2k+1)!}$$

17. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.

$$f : x \mapsto (x^2+1)\exp(x) \qquad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

18. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.

$$f : x \mapsto (x^2-2)\sin x \qquad g : x \mapsto \frac{6}{1-\sqrt{x}}$$

19. Pro následující funkce určete jejich přirozený definiční obor a na jeho jednotlivých intervalech nalezněte k funkcím primitivní funkci. Proveďte zkoušku správnosti výsledku.

$$f : x \mapsto x^5 \log\sqrt{x} \qquad g : x \mapsto \frac{\exp(2x)}{\exp(2x)+\exp(x)-6}$$

20. Vypočtěte Newtonovy určité integrály a uveďte, zda Riemannovy integrály vyjdou stejně.

$$\int_0^1 x \log x \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$$

21. Vypočtěte Newtonovy určité integrály a uveďte, zda Riemannovy integrály vyjdou stejně.

$$\int_0^{\pi} \sin^7 x \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \log \tfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

22. Převeďte vhodnou substitucí integrál na integrál racionální funkce. Integrál nepočítejte, pouze integrovanou funkci upravte na podíl dvou polynomů.

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x}{x-2}} \,\mathrm{d}x$$

23. Převeďte vhodnou substitucí integrál na integrál racionální funkce. Integrál nepočítejte, pouze integrovanou funkci upravte na podíl dvou polynomů.

$$\int_0^{\pi} \frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

24. Převeďte vhodnou substitucí integrál na integrál racionální funkce. Integrál nepočítejte, pouze integrovanou funkci upravte na podíl dvou polynomů.

$$\int_1^{2} \frac{x}{1+\sqrt{4x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

25. Načrtněte graf funkce f a pro $x \in (0,4)$ vypočtěte Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(3)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0,4)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$f(t) = \begin{cases} 8-t^2 & t \in (0,3) \\ t & t \in (3,4) \end{cases}$$

26. Graf funkce f je sjednocením úseček AB, CD (krajní body do grafu funkce nepatří). Načrtněte graf funkce f a prostředky elementární geometrie vypočtěte pro $x \in (0,3)$ Riemannův integrál s proměnnou horní mezí $F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(2)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0,3)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$A = [0,3] \quad B = [2,0] \quad C = [2,2] \quad D = [3,0]$$

27. Vypočtěte obsah a polohu těžiště rovinného obrazce daného nerovnostmi. Nakreslete obrázek, počítané veličiny odhadněte a porovnejte odhad s vypočtenou hodnotou.

$$y \geq x^2 - 3x + 1 \qquad y \leq 2x + 1$$

28. Vypočtěte vzdálenost těžiště půlkruhu o poloměru R od středu příslušného kruhu (středu průměru půlkruhu). Obsah půlkruhu nemusíte počítat integrálem.

29. Načrtněte obrazec O a vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce okolo osy x.

$$O = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4], y \in [0, \sqrt{4-x}]\}$$

30. Načrtněte obrazec O a vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce okolo osy y.

$$O = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4], y \in [0, 4-x^2]\}$$

31. Načrtněte obrazec O a vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce okolo osy y.

$$O = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, \arcsin(x)]\}$$