Matematická analýza pro učitele
(text je v pracovní verzi)

Martina Šimůnková

8. února 2019

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V textu se budeme zabývat *funkcemi* jedné reálné proměnné. V této úvodní kapitole vyložíme, co to funkce je, a nastíníme, co všechno nás na funkcích bude zajímat.

1.1 Co je to funkce

Historicky byla funkce předpis, např. $f(x) = x^2$. Dnes pod pojmem funkce rozumíme závislost mezi dvěma proměnnými, která může, ale nemusí být dána jedním předpisem. Tyto stručné historické poznámky čerpáme z [2], 4.4.7, zvídavý čtenář tam najde další podrobnosti.

Funkce zadané (jedním) předpisem nazýváme *elementármími funkcemi*. Zkoumání těchto funkcí bude jedním z našich cílů, ale nikoliv jediným.

Příkladem funkcí zadaných jinak než jedním předpisem jsou funkce f, g,

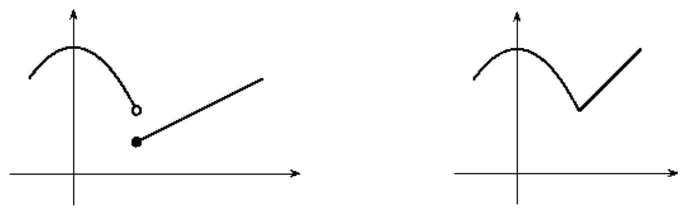
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x/2 & x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Dirichletova funkce δ

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nebo funkce zadané empiricky jako například průběh teploty naměřené meteorologickou stanicí v závislosti na čase.

Důležitým pojmem je *graf funkce*. Na obrázku jsou grafy funkcí z (1.1), vlevo funkce f, vpravo g.



Grafem Dirichletovy funkce jsou dvě „řídké“ přímky.

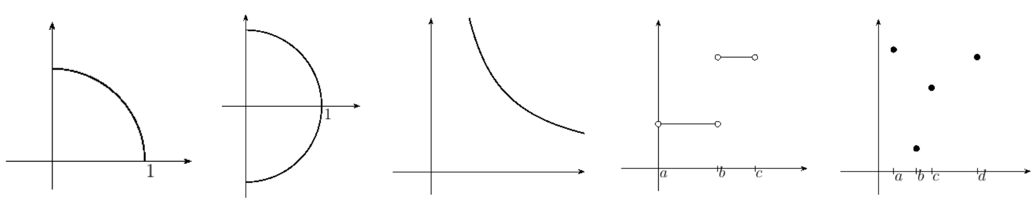
Někdy se funkce definuje primárně jako její graf, tedy množina dvojic reálných čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ taková, že k číslu x leží na tomto grafu maximálně jeden bod $[x, y]$. Jinak řečeno, leží-li body $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ na grafu funkce, musí platit $y_1 = y_2$. Formálně zapsáno $G \subset \mathbb{R}^2$ je grafem funkce, pokud platí

$$(\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R})(([x, y_1] \in G \wedge [x, y_2] \in G) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Čteme: pro každou trojici reálných čísel x, y_1, y_2 z platnosti $[x, y_1] \in G$, $[x, y_2] \in G$ plyne $y_1 = y_2$. Rozmyslete si, že významově stejné je tvrzení: pro každou trojici reálných čísel x, y_1, y_2 splňující $[x, y_1] \in G$, $[x, y_2] \in G$ platí $y_1 = y_2$.[1]

Teprve z grafu funkce je poté odvozen předpis a definiční obor funkce. Číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřadíme číslo y splňující $[x, y] \in G$. Definičním oborem je množina čísel x, pro něž existuje číslo y takové, že $[x, y] \in G$.

Vysvětlíme na následujících grafech.



Budeme procházet obrázky zleva doprava.

1. Na obrázku je čtvrtkružnice, která je grafem funkce s definičním oborem $[0, 1]$ a předpisem $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

2. Půlkružnice na obrázku není grafem funkce. Její rovnice je $x^2 + y^2 = 1$, $x \in [0, 1]$. Pro $x \in [0, 1)$ obsahuje dva různé body $[x, \sqrt{1 - x^2}]$, $[x, -\sqrt{1 - x^2}]$.

[1] O výrocích, kvantifikátorech, jejich čtení a významu více pojednáme v jedné z následujících kapitol.

3. Na obrázku je jedna větev hyperboly. Je grafem funkce, ale určit pouhým pohledem z grafu její definiční obor a předpis není jednoduché, protože není možné hyperbolu nakreslit celou. Doplníme-li, že souřadné osy jsou jejími asymptotami, můžeme určit definiční obor: $(0, +\infty)$. O funkčním předpisu víme, že je $x \mapsto k/x$, kde konstantu k nelze určit z grafu bez měřítka.

4. Na obrázku je graf po částech konstantní funkce s definičním oborem $(a, b) \cup (b, c)$. Jiným způsobem můžeme tento obor zapsat $(a, c) \setminus \{b\}$. [2]

5. Na obrázku tvoří graf funkce čtyři body. Definiční obor funkce je čtyřprvková množina $\{a, b, c, d\}$.

Výše mluvíme o funkci jako vztahu dvou proměnných. Jednu proměnnou zpravidla označujeme x a nazýváme ji *argumentem* funkce, *proměnnou* funkce, *vzorem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla nezávisle proměnnou. Druhou proměnnou zpravidla označujeme y nebo $f(x)$ (pro funkci pojmenovanou f) a nazýváme ji *funkční hodnotou*, *obrazem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla závisle proměnnou. Pokud mají proměnné nějaký význam, třeba geometrický (délka, obsah, souřadnice, ...) nebo fyzikální (čas, rychlost, síla, teplota, ...), často použijeme místo x, y značení dané veličině odpovídající. Například označíme čas t, vzdálenost s a $s = 1/2gt^2$ je závislost dráhy na čase při pohybu v gravitačním poli intenzity g. Nebo označíme délku hrany krychle a, objem krychle V a $V = a^3$ je závislost objemu na délce hrany.

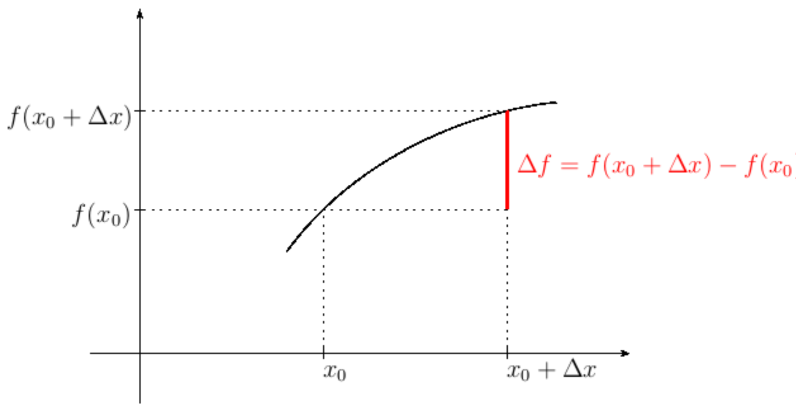
Pojmy (termíny) vzor a obraz znáte z geometrie při zobrazování (posunutí, otočení, zrcadlení). Funkce je speciálním typem zobrazení, kde vzory a obrazy jsou čísla.

Úkol. Uveďte další příklady funkcí jak elementárních, tak ostatních. Nejlépe takové, které popisují závislost fyzikálních, geometrických, případně jiných „reálných“ veličin. Dále uveďte příklady množin $G \subset \mathbb{R}^2$ a určete, zda jsou grafem funkce a případně určete definiční obor a předpis funkce.

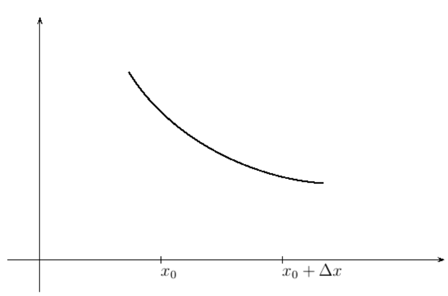
[2] První způsob je sjednocení dvou otevřených intervalů, druhý je rozdíl intervalu a jednoprvkové množiny. Více o množinách, operacích s nimi a způsobech zápisu v některé z dalších kapitol.

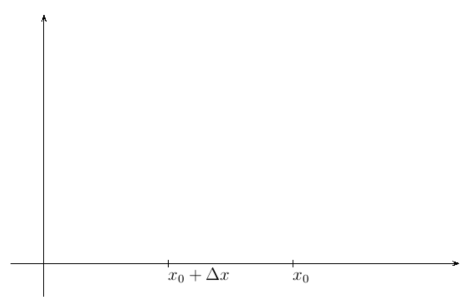
1.2 Co budeme na funkcích zkoumat

Bude nás zajímat, jak se mění funkční hodnota při změně proměnné – tyto změny zpravidla znázorňujeme na grafu funkce a používáme k tomu níže uvedenou terminologii.



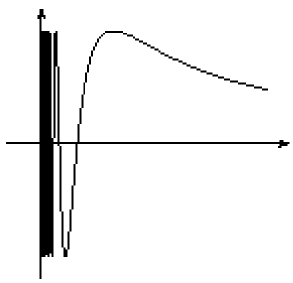
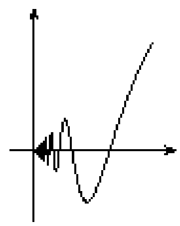
Číslo Δx budeme nazývat *přírůstkem proměnné* x, číslo Δf *přírůstkem funkce* (přesnější by asi bylo říkat přírůstek funkční hodnoty, ale moc se to nepoužívá). Následující obrázky ukazují situaci, kdy je přírůstek funkce, případně přírůstek proměnné záporný.





1.3 Spojitost funkce

V případě, že pro „malé“ hodnoty Δx je přírůstek funkce Δf „malý“, budeme říkat, že je funkce f *spojitá v bodě* x_0. Úvozovkami chceme zdůraznit značnou vágnost tohoto popisu. Pojem spojitosti se vyvíjel, podle poznámek 4.4.7 zmíněných výše byly kdysi obě funkce f, g uvedené v (1.1) považovány za nespojité [3] v bodě $x = 1$, protože se v tomto bodě mění funkční předpis. Podle současné definice spojitosti není funkce f v bodě $x = 1$ spojitá zatímco funkce g ano. Přesná definice pojmu spojitosti je poměrně obtížná a uvedeme ji později. K jejímu bližšímu objasnění uvedeme ještě několik příkladů.

Na levém obrázku je graf funkce

$$f(x) = \sin(1/x),$$

na pravém

$$g(x) = x \sin(1/x).$$

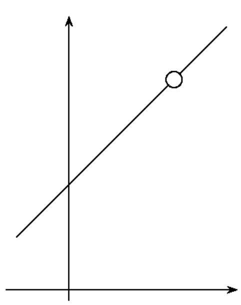
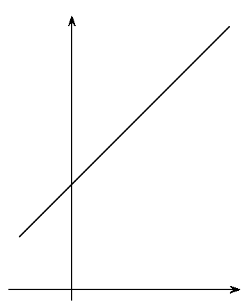
Obě funkce mají kořeny v bodech $1/x = k\pi$, tedy $x = 1/(k\pi)$, a tedy v okolí nuly je kořenů nahuštěno nekonečně mnoho. V bodě $x = 0$ tyto funkce nejsou definované. Pokud chceme, můžeme je v tomto bodě dodefinovat. Vzniknou tím nové funkce, které označíme $\hat{f}$, $\hat{g}$.

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \hat{g}(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Říkáme, že funkce $\hat{f}$ je *rozšířením funkce* f, funkce $\hat{g}$ je rozšířením funkce g.

Protože pro hodnoty x „blízké“ nule jsou hodnoty $\hat{g}(x)$ „blízké“ $\hat{g}(0)$, je funkce $\hat{g}$ spojitá v bodě nula a mluvíme o *spojitém rozšíření*. Funkce $\hat{f}$ je rozšířením funkce f, ale není jejím spojitým rozšířením.

Na následujících obrázcích je další příklad spojitého rozšíření, kdy definiční obor výrazu zvětšíme pokrácením.

Na obrázku vlevo je graf funkce

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a vpravo graf funkce

$$\hat{h}(x) = x + 1.$$

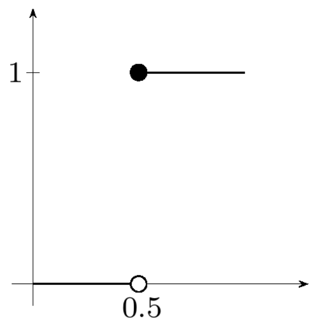
K pojmu spojitosti zatím uvedeme, že elementární funkce (tedy funkce za-

[3] Říkáme-li, že je funkce v bodě nespojitá, máme na mysli, že není spojitá. Toto není zcela samozřejmé, například rostoucí a nerostoucí funkce nejsou v tomto smyslu doplňkové pojmy.

dané jedním funkčním předpisem, které znáte ze střední školy) jsou na svých definičních oborech spojité.

Pokud funkce není v bodě x_0 spojitá, ale lze ji v tomto bodě spojitě rozšířit, říkáme, že má funkce v bodě x_0 *odstranitelnou nespojitost*. Příkladem odstranitelných nespojitostí je nespojitost funkce g v bodě $x = 0$ a nespojitost funkce h v bodě $x = 1$.

Dalším typem nespojitosti je *nespojitost typu skoku*.



Uvažujme funkci, která číslu x přiřadí číslo, které z čísla x vznikne zaokrouhlením na celé číslo. Tato funkce není spojitá v bodě $x = 0.5$.
Čísla $x \in (0, 0.5)$ zaokrouhlíme na nulu, zatímco čísla $x \in (0.5, 1)$ zaokrouhlíme na jedničku. Funkční hodnota tedy při „přechodu“ přes $x = 0.5$ „skočí“ o jedna.

Příkladem funkce, která není spojitá a tato nespojitost není odstranitelnou nespojitostí ani nespojitostí typu skoku, jsou funkce f a $\hat{f}$.

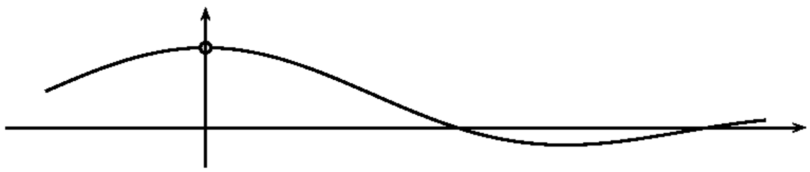
1.4 Limita funkce

S pojmem spojitosti úzce souvisí pojem limita. Například funkce $h : x \mapsto (x^2 - 1)/(x - 1)$ zmiňovaná výše není definovaná v bodě $x = 1$, ale má v tomto bodě limitu rovnu $\hat{h}(1) = 2$. Zjednodušeně to znamená, že pro x blízké jedné je $h(x)$ blízké dvěma.

Dalším příkladem funkce mající limitu je výše zmiňovaná funkce $g : x \mapsto x \sin(1/x)$. V bodě nula má limitu rovnu nule.

Příklad funkce nemající limitu je $f : x \mapsto \sin(1/x)$ v bodě nula. Vysvětlíme proč: pro velká $k \in \mathbb{N}$ jsou obě $x_+ = 1/(\pi/2 + 2k\pi)$ a $x_- = 1/(-\pi/2 + 2k\pi)$ „hodně blízko“ nule a zároveň je $f(x_+) = \sin(1/x_+) = 1$ a $f(x_-) = \sin(1/x_-) = -1$. Neexistuje tedy žádné reálné číslo, kterému by byly hodnoty $f(x)$ „blízké“ pro „všechna x blízká“ nule.

Na následujícím obrázku je graf funkce $x \mapsto (\sin x)/x$. V nule není funkce definovaná, ale z obrázku je vidět, že má v nule limitu. Hodnota limity závisí na jednotkách, které zvolíme pro výpočet sinu. Oblouková míra (radiány) se vyznačuje tím, že hodnota této limity je rovna jedné. V některé z dalších kapitol tuto skutečnost ukážeme. Připomeneme si přitom, jak je oblouková míra definovaná.

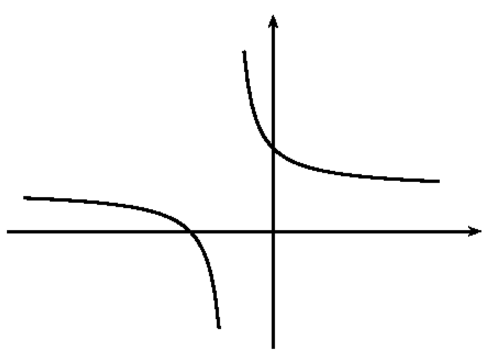


1.4.1 Nevlastní limity, jednostranné limity

Výše uvedené limity popisují chování funkce v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, a to takové chování, kdy funkční hodnoty jsou blízké hodnotě $L \in \mathbb{R}$ pro x blízké x_0. Číslo L nazýváme limitou funkce v bodě x_0.

Pojem limita funkce zahrnuje i případy, kdy některé z čísel x_0, L, nebo případně obě, jsou nekonečné. Vysvětlíme na funkci f a jejím grafu.

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$$



Pro x velké kladné je funkční hodnota blízká jedné polovině. Říkáme, že má funkce f v bodě $+\infty$ limitu rovnu $1/2$ a o limitě mluvíme jako o vlastní limitě v nevlastním bodě.

Předpona ne ve slově nevlastní označuje nekonečnou hodnotu.

Podobně je limita funkce f v bodě $-\infty$ rovna $1/2$.

Úkol. Zodpovězte otázky: Jak se jmenuje křivka, která je grafem funkce f? Jaký má tato křivka vztah k přímce o rovnici $y = 1/2$? A jak vztah křivky a přímky souvisí s nevlastními limitami, o kterých se píše výše?

Nevíte-li si rady, tak načrtněte graf funkce f, popište osy, dokreslete na ně měřítko a načrtněte i přímku o rovnici $y = 1/2$.

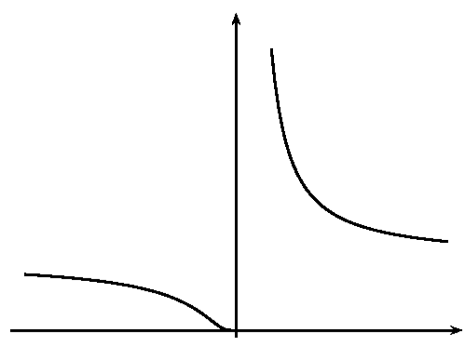
V bodě $x = -1/2$ není funkce f definovaná a v jeho okolí nabývá velkých hodnot. Pro x o trochu větší než $1/2$ jsou funkční hodnoty velké kladné –

říkáme, že má funkce v bodě $x = -1/2$ zprava limitu rovnu $+\infty$ a mluvíme o nevlastní limitě ve vlastním bodě.

Podobně: v bodě $x = -1/2$ zleva má funkce limitu rovnu $-\infty$.

Úkol. Zodpovězte stejné otázky jako výše pro přímku o rovnici $x = -1/2$.

Ještě jeden graf a příklad: $x \mapsto 2^{1/x}$.



Limita v bodě $x = 0$ zleva je rovna nule, zprava je rovna $+\infty$.
Z grafu lze tušit i limity v bodech $\pm\infty$. V kapitole o limitách složené funkce si vysvětlíme, že jsou obě rovny jedné. Pokud se nad nimi chcete zamyslet už teď, tak si rozmyslete, jakých hodnot nabývá výraz $2^{1/x}$ pro x hodně velké kladné, případně hodně velké záporné.

Úkol. Jednostranné limity v nule jsme určili z grafu. Určete je bez grafu jen z vlastností (a grafů) funkcí $x \mapsto y = 1/x$, $y \mapsto 2^y$.

Dalším příkladem jednostranných limit je „zaokrouhlovací“ funkce z konce článku 1.4. Limita této funkce v bodě 0.5 zleva je rovna nule a zprava rovna jedné.

1.5 Aproximace funkcí

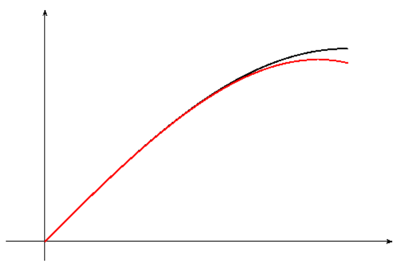
Někdy si potřebujeme práci s funkcemi zjednodušit, proto „složitou“ funkci nahradíme „jednodušší“ funkcí. Za toto nahrazení a zjednodušení zaplatíme menší přesností. Místo o nahrazení mluvíme většinou o *aproximaci*.

Za aproximující funkci často volíme lineární funkci, nebo, chceme-li aproximaci zpřesnit, polynom.

Aproximace může být lokální nebo globální.

1.5.1 Aproximace polynomem

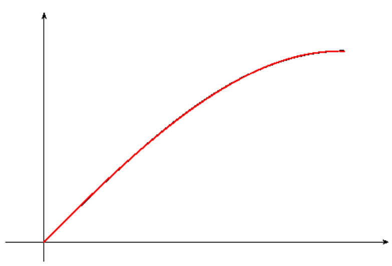
Ukážeme na grafu a na tabulce funkčních hodnot dvě různé aproximace funkce sinus polynomem třetího stupně.



Vlevo je černě graf funkce sinus na intervalu $[0, \pi/2]$ a červeně na stejném intervalu graf polynomu. Nazýváme ho Taylorův polynom a budeme se jím v některé z dalších kapitol zabývat.

$$T : x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$$

Na dalším obrázku je podobná situace, tentokrát s interpolačním[4] polynomem.



Grafy se téměř překrývají. Při zvětšení je vidět, jak černý graf přechází několikrát přes červený. Potvrdí se to v tabulce dole.[a]

$$I : x \mapsto -0.114x^3 - 0.066x^2 + 1.023x - 0.0011$$

[a]Koeficienty jsou zaokrouhlené. Rozdíly v tabulce jsou spočítané pro přesnější hodnoty koeficientů.

x	$\sin x$	$T(x)$	$I(x)$	$T(x) - \sin x$	$I(x) - \sin x$
0	0	0.000	-0.001	0	-10^{-3}
0.2	0.199	0.199	0.200	-3×10^{-6}	10^{-3}
0.4	0.389	0.389	0.390	-9×10^{-5}	6×10^{-4}
0.6	0.565	0.564	0.564	-6×10^{-4}	-8×10^{-4}
0.8	0.717	0.715	0.716	-3×10^{-3}	-10^{-3}
1	0.841	0.833	0.841	-8×10^{-3}	-6×10^{-4}
1.2	0.932	0.912	0.933	-2×10^{-2}	9×10^{-4}
1.4	0.985	0.943	0.987	-4×10^{-2}	10^{-3}

V tabulce je v prvním sloupci hodnota proměnné x, ve druhém její funkční hodnota $\sin x$, ve třetím a čtvrtém jsou hodnoty polynomů $T(x)$, $I(x)$ a v pátém a šestém jsou hodnoty rozdílů $T(x) - \sin x$, $I(x) - \sin x$. Tyto rozdíly ukazují kvalitu aproximace. Vidíme, že aproximace Taylorovým polynomem je dobrá v okolí bodu nula a ve větší vzdálenosti od bodu nula se zhoršuje. Aproximace interpolačním polynomem je stejně dobrá v celém intervalu. Taylorův polynom proto někdy nazýváme *lokální aproximací* a interpolační polynom *globální aproximací*.

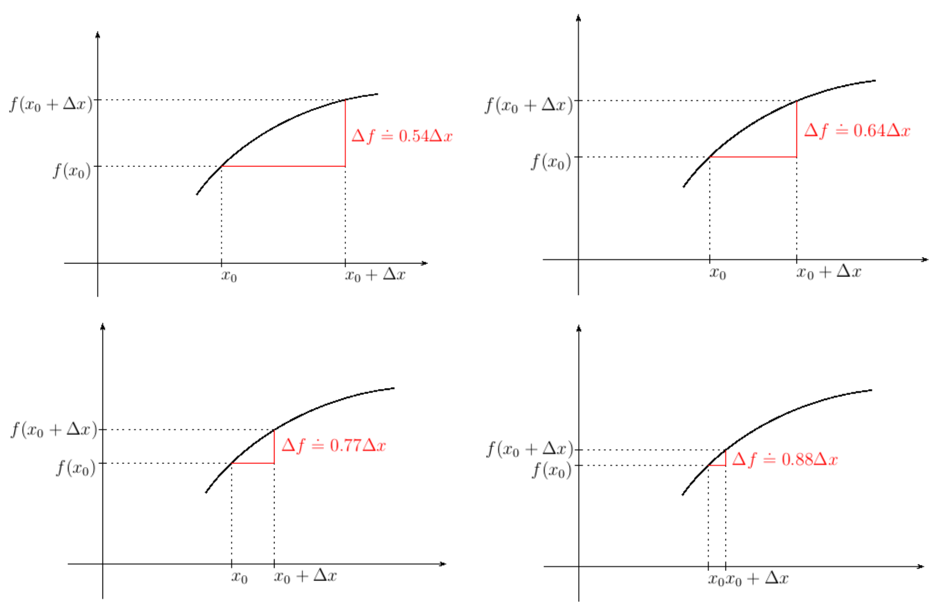
[4]Vybrali jsme čtyři body z intervalu $[0, \pi/2]$ a sestavili polynom mající stejnou funkční hodnotu jako aproximovaná funkce sinus. Více si zvídavý čtenář může přečíst například v [2], v tomto textu se interpolačnímu polynomu věnovat nebudeme.

V textu se budeme podrobněji zabývat lokální aproximací. Nejdříve budeme aproximovat lineární funkcí a ukážeme něco, co je intuitivně jasné, a sice, že nejlepší lineární aproximaci získáme pomocí tečny ke grafu funkce. Později přejdeme k aproximaci polynomem vyššího stupně než jedna.

Otázky. Zamysleli jste se někdy nad tím, jak kalkulačka počítá sinus? Pokud byste měli na výběr některý z interpolačních polynomů, přitom kvůli větší přesnosti bychom použili polynomy vyššího stupně, který byste použili? Šlo by oba polynomy zkombinovat? Jak byste je zkombinovali, aby byla přesnost a rychlost výpočtu[5] co nejlepší?

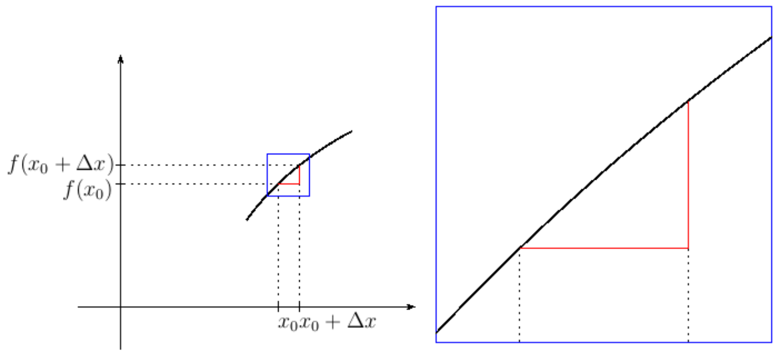
1.6 Derivace

Dalším pojmem je *derivace*, která „malé“ změny proměnných přesněji kvantifikuje. Podívejme se, co se děje s podílem přírůstků funkce a její proměnné $\Delta f/\Delta x$ při zmenšování Δx k nule. Vysvětlíme na funkci, jejímž grafem je oblouček, vezmeme tu z článku 1.2. Na obrázcích je kromě grafu funkce f a bodu x_0 na ose x zobrazen měnící se přírůstek Δx. Dále je na každém obrázku uveden podíl $\Delta f/\Delta x$ zaokrouhlený na setiny.



[5] Čím více členů polynom má, tím déle se počítá jeho funkční hodnota.

Na následujícím obrázku je zobrazen výřez z posledního grafu s nejmenší hodnotou Δx.



Vidíme, že se graf funkce ve výřezu mezi x_0 a $x_0+\Delta x$ podobá úsečce. To se projeví tím, že se podíl $\Delta f/\Delta x$ málo mění při dalším zmenšování Δx.[6]

V tabulce jsou uvedeny podíly přírůstků v závislosti na přírůstku proměnné, za čarou i pro dále se zmenšující hodnotu přírůstku Δx.[7]

Δx	1.5	1.0	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$\Delta f/\Delta x$	0.54	0.64	0.77	0.88	0.92	0.94	0.95	0.96	0.96

Vidíme, že se hodnoty podílu „ustalují“ na 0.96. Podíl $\Delta f/\Delta x$ má pro Δx blížící se k nule limitu rovnu tomuto číslu. Tuto limitu nazýváme *derivací funkce v bodě* x_0.

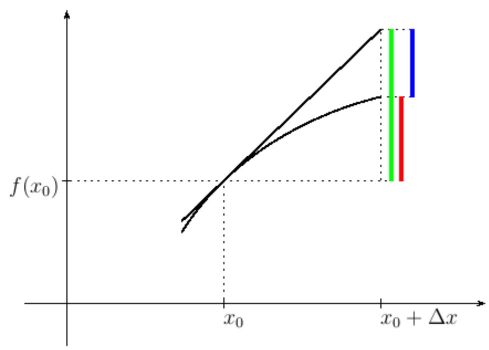
Přímku procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$, na které jsou přírůstky Δy, Δx přímo úměrné a derivace je konstanta této úměrnosti, budeme nazývat *tečnou ke grafu funkce v bodě* x_0.[8] Označíme-li derivaci v bodě x_0 symbolem D, má tato tečna rovnici

$$y = D(x - x_0) + f(x_0) \tag{1.3}$$

[6] Je-li grafem opravdu úsečka, je přírůstek Δf přímo úměrný přírůstku Δx a uvedený podíl je tedy konstantní. Pro podrobnosti odkazujeme na kapitolu 14, dodatek o přímé úměře.

[7] Pro případ, že by chtěl čtenář uvedenou tabulku přepočítat, mu prozradíme předpis funkce $\sqrt{6x - x^2 - 4} + 0.06(x-1)^2 - 0.5$ a bod $x_0 = 1.5$.

[8] Když mluvíme o chování funkce v bodě, například o tečně v bodě, máme na mysli bod na ose x charakterizovaný jedním reálným číslem. V grafu pak toto chování znázorňujeme zpravidla v bodě o dvou souřadnicích $[x, f(x)]$.



Na obrázku je graf funkce s tečnou a barevně vyznačenými přírůstky.

Červeně je vyznačen přírůstek funkce Δf.

Zeleně je vyznačen přírůstek na tečně, budeme ho značit $\mathrm{d}f$ a nazývat *lineární částí přírůstku funkce.*

Z podrobnosti trojúhelníků plyne pro proměnné Δx (tedy nejen to na obrázku nakreslené)

$$\mathrm{d}f/\Delta x = D.$$

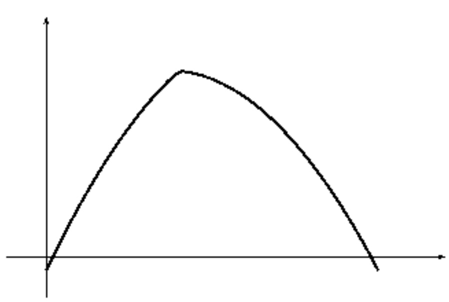
Modře je vyznačen rozdíl přírůstků $\mathrm{d}f - \Delta f$.

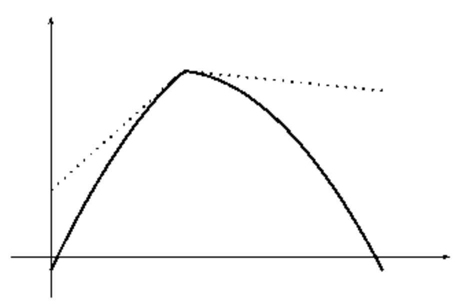
Výše jsme se zmiňovali, že tečna je grafem lokální aproximace funkce. Rozdíl $\mathrm{d}f - \Delta f$ je pak chybou takové aproximace. Ze vztahů $\mathrm{d}f/\Delta x = D$, $\Delta f/\Delta x \doteq D$ plyne

$$\frac{\mathrm{d}f - \Delta f}{\Delta x} \doteq 0. \tag{1.4}$$

V kapitole o derivaci tento vztah budeme interpretovat: chyba aproximace $\mathrm{d}f - \Delta f$ je pro malé hodnoty Δx ve srovnání s Δx zanedbatelná.

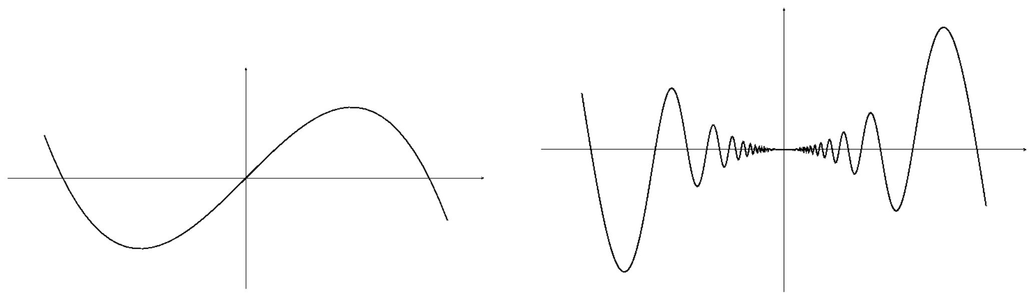
Uvedeme ještě několik příkladů. Na následujících obrázcích nás zajímá bod, v němž je graf „zlomený“. Podíl přírůstků $\Delta f/\Delta x$ vpravo od tohoto bodu se liší od podílu vlevo. Graf funkce nemá v tomto bodě tečnu a funkce nemá v tomto bodě derivaci. Na obrázku vpravo jsou ke grafu tečkovaně dokresleny „polotečny“ na obě strany.





Podobným příkladem je funkce absolutní hodnota: $x \mapsto |x|$ v bodě nula.

V dalších příkladech ukážeme, že tečna ke grafu funkce tak, jak jsme ji definovali, nemusí mít obvyklý geometrický význam. Její hlavní význam vyjadřuje vztah (1.4). Na obou obrázcích dole nás zajímá tečna ke grafu funkce v počátku soustavy souřadné. Z geometrie jste zvyklí, že například kružnice leží celá na jedné straně své tečny. Na obrázku vlevo tomu tak není a tečna protíná graf v tečném bodě. Na obrázku vpravo je tečnou osa x, protože vyhovuje aproximační vlastnosti (1.4) a nevadí, že v okolí tečného bodu graf tečnu mnohokrát[9] protne.



1.7 Nekonečně malé veličiny

Pojem derivace funkce pochází od sira Isaaca Newtona (1642 – 1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716). Pojmy spojitosti funkce (Bolzano 1817) a limity funkce (Weierstrass 1874) jsou o víc jak sto let mladší. Pánové Newton a Leibniz za derivaci považovali podíl nekonečně malých přírůstků funkční hodnoty a proměnné funkce.

Nekonečně malý přírůstek proměnné x označíme $\mathrm{d}x$. Jemu odpovídá nekonečně malý přírůstek funkční hodnoty $\mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$. Pro funkci $x \mapsto x^2$ dostaneme

$$\mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2.$$

Odtud dostaneme podíl

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$

Přírůstek $\mathrm{d}x$ je nekonečně malý, proto za něj dosadíme nulu. Dostaneme derivaci funkce $x \mapsto x^2$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

[9] Dokonce nekonečněkrát, předpis funkce je $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$. Srojvejte s grafem funkce $x \mapsto x \sin(1/x)$ uvedeným v 1.3

Ve výpočtu je rozpor: výrazem dx nejdříve dělíme a pak za něj dosadíme nulu. S tímto rozporem se matematici dlouhé roky vyrovnávali konceptem nekonečně malé nenulové veličiny, kterou chápali intuitivně. Teprve v dobách Bolzana a Weierstrasse matematici použili pojmy spojitost a limita k vyřešení tohoto rozporu.

1.8 WolframAlpha

Na webu www.wolframalpha.com si můžete nechat vykreslit grafy elementárních funkcí. Klíčové slovo je `plot`. Vyzkoušejte

```
plot(x sin(1/x))
plot(x sin(1/x), (x,0,0.1))
plot(x^2, x^4, x^6)
plot(sin(x)/x)
plot(2^(1/x))
```

Grafy berte jako užitečnou ilustraci, ale mějte na paměti, že jsou vykreslovány z vypočítaných funkčních hodnot a někdy takový způsob některé vlastnosti funkce zkreslí. Podívejte se třeba na graf funkce $x \mapsto e^{\operatorname{cotg} x}$ na intervalu $[\pi/4, \pi]$ a zamyslete se nad průnikem grafu s osou x.

```
plot(exp(cot(x)), (x, PI/4, PI))
```

Jedním z cílů tohoto textu je vyložit, jak získat zajímavé body grafu výpočtem. WolframAlpha vám pak může sloužit jako kontrola vašich výpočtů, nebo jako vodítko, které vaše výpočty nasměruje, nevíte-li si s nimi rady. Při výkladu budeme WolframAlpha používat pro znázornění probíraných pojmů.

1.9 Elementární funkce

Dalším naším cílem bude definování elementárních funkcí a zkoumání jejich vlastností.

Začneme funkcemi, k jejichž definici stačí aritmetické operace. Patří mezi ně *polynomy*, možná je znáte pod názvem mnohočleny, a podíly polynomů, ty budeme nazývat *racionální funkce*.

Řekneme si něco o kořenech polynomů a o rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů. Tyto pojmy by vám měly být povědomé pro kvadratické polynomy. My je budeme uvažovat i pro polynomy vyššího stupně.

Předpokládáme, že čtenář umí sčítat racionální funkce, my si ukážeme opačnou operaci, a sice rozklad racionální funkce na součet jednodušších racionálních funkcí, těm budeme říkat *parciální zlomky*. Řekneme si, jak ze jmenovatele racionální funkce určit jmenovatele parciálních zlomků, například

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \\ \frac{x^2+2x+3}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \end{aligned}$$

a ukážeme si, jak se spočítají hodnoty čísel A, B případně C.

Další funkce, kterými se budeme zabývat, jsou odmocniny. Ukážeme si, že existence odmocnin není úplně samozřejmá a že souvisí s vlastností reálných čísel, o které budeme mluvit v kapitole o číslech.

V kapitole o spojitých funkcích pak ukážeme, že funkce definovaná na intervalu, která je na něm spojitá a navíc buď rostoucí nebo klesající má inverzní funkci, jejíž definiční obor je opět interval. Tato vlastnost nám pak bude sloužit při definování dalších inverzních funkcí, a sice logaritmů a cyklometrických funkcí.[10]

Probereme vlastnosti mocninných funkcí. Budeme je budovat postupně pro exponent, který je přirozené číslo, nula, celé číslo, racionální číslo. Vysvětlíme si přitom, že vztahy

$$x^0 = 1 \qquad x^{-1} = 1/x \qquad x^{1/2} = \sqrt{x} \tag{1.5}$$

jsou důsledkem přirozeného požadavku, aby vztah

$$a^{m+n} = a^m a^n, \tag{1.6}$$

který odvodíme pro exponenty $m, n \in \mathbb{N}$ platil i pro $m, n \in \mathbb{R}$.

Od mocninných funkcí přejdeme k funkcím exponenciálním. Vztahy (1.5) nám umožní pro $a > 0$ definovat funkci $q \mapsto a^q$ pro $q \in \mathbb{Q}$. Z množiny

[10]Mezi cyklometrické funkce patří arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Na kalkulačce jsou obvykle značeny jako $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ a je dobré si pamatovat, že „na mínus prvou“ neoznačuje mocninu.

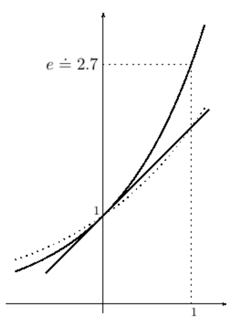
racionálních čísel pak exponenciální funkci spojitě rozšíříme na množinu reálných čísel.

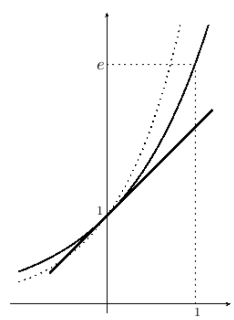
V [2] je symbolem exp označena exponenciální funkce se základem $e \doteq 2.718$. Je zde definovaná vztahy

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)) \tag{1.7}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq 1 + x) \tag{1.8}$$

Přitom (1.7) je jen jinak napsaný vztah (1.6). Vztah (1.8) určuje mimo jiné základ exponenciální funkce, viz následující obrázky.





Na obou obrázcích je plnou čarou graf funkce exp s přímkou o rovnici $y = x+1$. Nerovnost (1.8) se na grafu projeví tím, že se graf exponenciální funkce přímky dotýká a mimo bod dotyku leží nad přímkou.

Tečkovaně jsou na obrázcích grafy s jiným základem. Na obrázku vlevo $x \mapsto 2^x$, na obrázku vpravo $x \mapsto 4^x$.

Je vidět, že osu y oba tečkované grafy protínají pod jiným úhlem než přímka a leží tedy částečně pod ní. Exponenciální funkce se základem 2 případně 4 tedy nesplňují (1.8).

Ukážeme si později, že vztah (1.8) navíc zajišťuje spojitost exponenciální funkce a tím i jednoznačné rozšíření z racionálních na reálné exponenty.

Budeme definovat logaritmus jako funkci inverzní k exponenciální funkci a budeme používat značení běžné v matematické literatuře – symbolem log budeme značit logaritmus se základem e, který znáte pod názvem přirozený logaritmus. S dekadickým logaritmem se v matematické literatuře setkáváme zřídka.

Exponenciální funkci při obecném kladném základu pak definujeme pomocí exponenciální a logaritmické funkce vztahem $a^x = \exp(x \log a)$.

Připomeneme trigonometrickou definici goniometrických funkcí, zobecnění pro jiné než ostré úhly na jednotkové kružnici a odvodíme součtové vzorce pro sinus a kosinus. Řekneme si, že se goniometrické funkce dají definovat pomocí součtových vzorců podobně jako funkce exponenciální v (1.7), (1.8), ale více se tomuto způsobu věnovat nebudeme a odkážeme případného zájemce na [2]. Vystačíme s definicí na jednotkové kružnici a odvozenými součtovými vzorci.

Kapitola 2

Čísla

Na webu je samostatný text o číslech, který sem bude po přepracování vložen. Najdete ho v adresáři kap.fp.tul.cz/∼simunkova/an1-2017-18/1-Cisla a lze se k němu proklikat přes archiv starších ročníků, na který je na webu dole odkaz.

Následující články doplňují, co v něm chybí.

V úvodním článku pojednáme o racionálních číslech.

V následujícím rozebereme podrobněji bod 5 zabývající se reálnými čísly. Budeme vycházet z textu [2] a odkazovat se na něj. Některé jeho partie podrobněji rozebereme.

2.1 Racionální čísla

Zamyšlení. Co je to racionální číslo?

Pokud odpovíte, že zlomek, je třeba říct, co tím myslíte. Je $\pi/2$ zlomek? Pokud ano, je $\pi/2$ racionální číslo? Pokud ne, tak co je to zlomek?

V [1] je popisována tzv. první krize matematiky ve starověkém Řecku. Řečtí učenci věřili, že je každá dvojice úseček *souměřitelná*, což znamená, že jsou jejich délky celistvým násobkem určité společné jednotkové délky. Označíme-li tuto základní délku d a má-li první úsečka délku m-násobnou, tedy md a druhá úsečka délku n-násobnou, tedy nd, pak je poměr délek obou úseček roven m/n.

Pokud by tedy byla každá dvojice úseček souměřitelná, pak zvolíme některou úsečku jako jednotkovou a každá další má délku rovnu poměru dvou celých čísel. Takový podíl nazýváme *racionálním číslem*. Racionální od slova *ratio*, neboli podíl. Význam slova racionální, česky rozumný, je pravděpodobně odvozen právě od slova ratio a víry v rozumnost délek vyjádřených poměrem.[1]

Krize matematiky přišla s objevem, že úhlopříčka čtverce o jednotkové straně má délku odmocnina ze dvou a ta není racionálním číslem.

Věta o odmocnině. Odmocnina ze dvou není racionální číslo.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že naše tvrzení neplatí, tedy že existují přirozená čísla m, n splňující $(m/n)^2 = 2$ a odvodíme spor, tedy něco, co nemůže být pravda. Odtud usoudíme, že náš výchozí předpoklad nemůže platit, a tedy platí tvrzení věty.

O číslech m, n budeme navíc předpokládat, že nejsou obě sudá. Pokud by byla obě sudá, tak bychom ve zlomku m/n pokrátili dvěma nebo vhodnou mocninou dvou a dostali zlomek, který nemá i čitatele i jmenovatele sudého.

Ze vztahu $(m/n)^2 = 2$ po úpravě odvodíme $m^2 = 2n^2$. Protože je pravá strana sudá, musí být sudá i levá strana. Odtud plyne, že je m sudé. Kdyby nebylo sudé, tedy bylo liché, tedy bychom ho mohli zapsat ve tvaru $m = 2k-1$ s přirozeným k, pak by bylo $m^2 = 4(k^2 - k) + 1$, a tedy by m^2 bylo liché.

Víme tedy, že je m sudé. Proto ho můžeme zapsat pomocí přirozeného l ve tvaru $m = 2l$. Odtud je $m^2 = 4l^2$. Dosazením do $m^2 = 2n^2$ dostaneme $4l^2 = 2n^2$, pokrátíme na $2l^2 = n^2$ a stejnou úvahou jako výše odvodíme, že je n sudé. A to je slibovaný spor a důkaz zde končí. □

2.2 Vlastnosti reálných čísel

Máme na mysli vlastnosti (1) až (13) vypsané v [2] na stranách 20, 21 a 25. Poznamenejme, že jsou zde vlastnosti nazývány axiomy. Budeme tato slova[2] zaměňovat, protože nepředpokládáme, že čtenář zná rozdíl mezi nimi. Dokonce zatím rezignujeme na snahu tento rozdíl vysvětlit. Omezíme se na diskuzi ve třídě, ze které snad nějaké vysvětlení vzejde. Konstatujme jen, že pochopit, čím se liší, je těžké, nicméně čtenář mající ambici pochopit, čím se liší matematika od pouhého počítání, by měl o rozdílu přemýšlet.

[1] Přiznávám, že si tento příběh víceméně domýšlím. Možná jsem někdy dřív něco takového někde četla, ale nedokážu si vzpomenout kde. Poznámkou o ratiu a racionalitě se snažím motivovat studenty zapamatovat si definici racionálního čísla. Občas se zděšením zjistím, že s tím mají problém. A tak se kvůli tomu dopouštím bájení.

[2] Slova vlastnosti a axiomy.

Vlastnosti (1) až (9) jsou čtenáři dobře známé. Ukážeme na příkladu, jak je používáme při řešení rovnic.

Příklad. Ze vztahu mezi proměnnými $xy + 2x + y = 5$ chceme vyjádřit proměnnou y v závislosti na proměnné x.

Vztah (2), asociativitu sčítání, jsme použili k vypuštění závorek, které nyní doplníme: $xy + (2x + y) = 5$.
Použijeme (1), komutativitu sčítání: $xy + (y + 2x) = 5$.
Použijeme (2), asociativitu sčítání: $(xy + y) + 2x = 5$.
Použijeme (7), existenci jednotkového prvku: $(xy + y \cdot 1) + 2x = 5$.
Použijeme (5), komutativitu násobení: $(xy + 1 \cdot y) + 2x = 5$.
Použijeme (9), distributivní zákon: $(x + 1)y + 2x = 5$.
Použijeme (4), existenci opačného prvku k $2x$: $(x + 1)y + 2x + (-2x) = 5 + (-2x)$. Na levé straně jsme nenapsali závorky – použili jsme asociativitu sčítání.
Použijeme (4), vlastnost opačného prvku: $(x + 1)y + 0 = 5 + (-2x)$.
Použijeme (3), vlastnost nulového prvku: $(x + 1)y = 5 + (-2x)$.
Použijeme (5), komutativitu násobení: $y(x + 1) = 5 + (-2x)$.

Nyní bychom rádi použili (8), vlastnost inverzního prvku k $x + 1$. To můžeme udělat v případě $x + 1 \neq 0$, tedy pro $x \neq -1$.
Dostaneme $y(x + 1)(x + 1)^{-1} = (5 - 2x)(x + 1)^{-1}$.

Použijeme (8), vlastnost inverzního prvku: $y \cdot 1 = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$.

Použijeme (7), vlastnost jednotkového prvku: $y = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$.

Pro $x = -1$ vyřešíme rovnici $y(x + 1) = 5 + (-2x)$ dosazením: $0 = 7$.

Závěr:
Pro $x = -1$ nemá rovnice žádný kořen[3].
Pro $x \neq -1$ má jeden kořen $y = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$.

Poznámka o odčítání a dělení. Všimněte si, že vlastnosti se týkají pouze operací sčítání a násobení. Operace odečítání a dělení jsou skryté v axiomech opačného a inverzního prvku. Odečítání $a - b$ je zkrácený zápis pro součet $a + (-b)$. Dělení a/b je zkrácený zápis pro součin ab^{-1}.

V příkladu bychom pak místo $y = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$ napsali $y = (5 - 2x)/(x + 1)$. V dalším textu budeme tento zápis používat.

Poznámka o umocňování. Další operací odvozenou od násobení jsou mocniny s přirozeným exponentem. Viz následující definice.

[3] Někdy říkáme, že rovnice nemá řešení.

Definice. Nechť je $a \in \mathbb{R}$. Pod symbolem a^1 budeme rozumět číslo o hodnotě a, tedy $a^1 = a$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ budeme pod symbolem a^n rozumět číslo o hodnotě $a^{n-1}a$, tedy $a^n = a^{n-1}a$.

Úkoly.

1. Rozmyslete si, jak z výše uvedené definice plynou vám známé vztahy $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$, $\ldots$.

2. Odvoďte z axiomů vzorce $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Na příkladu nerovnice ukážeme použití vlastností (12).

Příklad. Chceme vyřešit nerovnici $3x + 4 < 0$.
Použijeme první vztah vlastnosti (12), úpravu nerovnosti přičtením čísla -4 k oběma stranám. Dostaneme: $3x < -4$.
Použijeme druhý vztah vlastnosti (12), vynásobení nerovnosti kladným číslem 3^{-1}. Dostaneme: $x < -4/3$.

Poznámka o algebraických strukturách. V algebře budete probírat algebraické struktury – množiny s operacemi. Důležitou roli bude hrát struktura zvaná *těleso*[4], jehož typickými příklady jsou racionální, reálná a komplexní čísla s operacemi sčítání a násobení. Těleso budete definovat jako množinu se dvěma operacemi, které splňují vlastnosti (1) až (9).

Poznamenejme ještě, že na množině komplexních čísel není definováno uspořádání, proto pro ně nemá smysl uvažovat vlastnosti (10) až (12). Množina racionálních čísel tyto vlastnosti má.

Reálná a racionální čísla se liší až vlastností (13), se kterou se nejspíš čtenář teprve seznamuje a která je náročná na pochopení. Nazýváme ji vlastností supréma a budeme se jí zabývat v článku 2.4.

V následujícím článku se budeme zabývat dalšími vlastnostmi reálných čísel a ukážeme, že plynou z axiomů (1) až (12).

Poznámka o číslech a názvech. Čtenář by měl být schopný se zmiňovanými vlastnostmi pracovat. Užitečné je pamatovat si jejich názvy a zbytečné pamatovat si jejich čísla. Zde jsme čísla použili jen kvůli snažší dohledatelnosti v [2]. V dalším textu budeme místo čísel používat názvy.

[4] V [2] je těleso nazýváno polem.

Poznámka o podrobnosti odvozování a důkazů. Předchozí příklady jsme udělali velmi podrobně. Chtěli jsme ukázat, jak obvyklé úpravy rovnic a nerovnic souvisí s axiomy reálných čísel. V dalším budeme stručnější, především proto, abychom výklad příliš „nezahltili“ podrobnostmi. Vždy by však bylo dobré, kdyby čtenář uměl v případě potřeby takové vysvětlení až na axiomy provést. Zvláště takový rozbor doporučujeme v případě pochybností o platnosti použitého nebo odvozeného.

Při kompromisu mezi stručností a přehledností na jedné straně a pečlivostí a úplností na straně druhé se vždy řídíme cílovou čtenářskou skupinou. Proto je potřeba, aby studenti dávali autorce zpětnou vazbu a nebáli se říct, které partie textu jsou pro ně málo srozumitelné.

2.3 Další vlastnosti reálných čísel

V [2] je ve tvrzení 1.3.1 uvedeno i s důkazem pravidlo sčítání nerovností. My zde uvedeme pravidlo násobení nerovností.

Lemma o násobení nerovností. Nechť pro kladná čísla a, b, c, d platí $a < b$, $c < d$. Pak platí $ac < bd$.

DŮKAZ. Vynásobíme nerovnost $a < b$ číslem c: $ac < bc$. Nerovnost $c < d$ vynásobíme číslem b: $bc < bd$.

Na nerovnosti $ac < bc$, $bc < bd$ použijeme tranzitivitu (vlastnost 11). Dostaneme $ac < bd$. □

Z pravidla o násobení nerovností plyne pravidlo o umocňování nerovností, jak ukazuje následující lemma.

Lemma o umocňování nerovností. Nechť pro kladná čísla a, b platí $a < b$ a nechť je $n \geq 2$ přirozené číslo. Pak platí $a^n < b^n$.

DŮKAZ. Použijeme předchozí lemma a vynásobíme nerovnost $a < b$ samu se sebou. Dostaneme $a^2 < b^2$, tedy závěr[5] lemmatu pro $n = 2$.

Vynásobením nerovnosti $a < b$ s nerovností $a^2 < b^2$ dostaneme nerovnost $a^3 < b^3$, tedy závěr lemmatu pro $n = 3$.

Dalším krokem by bylo vynásobení nerovnosti $a < b$ s $a^3 < b^3$ ... a takto bychom mohli postupovat libovolně dlouho.

Můžeme to zkrátit tím, že vynásobíme nerovnost $a < b$ nerovností $a^n < b^n$. Dostaneme nerovnost $a^{n+1} < b^{n+1}$. Ukázali jsme tím, že z platnosti závěru

[5] O předpokladu a závěru se čtenář dočte více v následující poznámce.

lemmatu pro n plyne jeho platnost pro $n+1$. Tomu říkáme *indukční krok* a tento způsob důkazu nazýváme *důkazem matematickou indukcí*.[6] □

Poznámka o předpokladu a závěru. Předchozí lemma bylo zformulováno jako implikace: jestliže platí $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pak platí $a^n < b^n$.

Výrok $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ nazýváme *předpokladem* lemmatu, výrok $a^n < b^n$ *závěrem* lemmatu.

Čárky ve výroku $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ chápeme jako konjunkce $\wedge$ („a zároveň").

Poznámka o matematické indukci. Důkaz *matematickou indukcí* používáme na tvrzení o přirozených číslech. Skládá se ze dvou částí. V jedné části ukážeme platnost tvrzení pro nejmenší číslo, ve druhé takzvaný *indukční krok*. V indukčním kroku předpokládáme platnost tvrzení pro n a dokazujeme jeho platnost pro $n+1$.

Nejmenší číslo je zpravidla $n = 1$, ale pokud chceme nějaké tvrzení dokázat třeba pro $n \geq 5$, pak je nejmenším číslem $n = 5$.

V [2] si může zvídavý čtenář přečíst o matematické indunkci na stranách 27 až 32.

Čtenář jistě ví, že při násobení nerovnosti záporným číslem se obrací smysl nerovnosti. Zformulujeme a dokážeme tuto vlastnost.

Lemma o násobení nerovnosti záporným číslem. Nechť je $a < b$, $c < 0$. Pak je $ac > bc$.

Důkaz. K nerovnosti $c < 0$ přičteme opačný prvek $-c$. Dostaneme $0 < -c$. Nerovnost $a < b$ vynásobíme kladným číslem $-c$. Dostaneme $a(-c) < b(-c)$.

Níže ukážeme pomocné tvrzení: $a(-c) = -(ac)$. Pak platí i $b(-c) = -(bc)$. Přepíšeme tedy $a(-c) < b(-c)$ na $-(ac) < -(bc)$. K nerovnosti postupně přičteme ac, bc. Dostaneme $bc < ac$.

Dokažme ještě pomocné tvrzení. K důkazu $a(-c) = -(ac)$ stačí ukázat[7], že $a(-c) + ac = 0$. Tady stačí použít na úpravu levé strany rovnosti distributivitu. Dostaneme $a(-c + c) = 0$, což plyne z vlastnosti opačného prvku a z dalšího pomocného tvrzení – cokoliv vynásobíme nulou, dostaneme nulu. □

Poznámka o pomocných tvrzeních a stavbě důkazů. Předchozí důkaz by byl přehlednější, kdybychom lemmatu o násobení nerovnosti záporným

[6] O důkazu matematickou indukcí více v následující poznámce.
[7] Viz vlastnost opačného prvku.

číslem předřadili další dvě lemmata a pak se na ně v důkazu odkázali. Tato lemmata by tvrdila:

1. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 0 = 0$.

2. Pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{R}$ platí $(-a)b = -(ab)$.

V [2] si na straně 22 přečtěte definici neostré nerovnosti. Dokážeme pro ni pravidlo o násobení nerovností.

Lemma o násobení neostrých nerovností. Nechť pro nezáporná reálná čísla a, b, c, d platí $a \leq b$, $c \leq d$. Pak platí $ac \leq bd$.

Důkaz rozdělíme na několik případů. Rozmyslete si, že pokrývají všechny možnosti v předpokladech lemmatu.[8]

1. a, b, c, d jsou kladná, $a < b$, $c < d$
   z lemmatu o násobení nerovností plyne $ac < bd$, a tedy i $ac \leq bd$

2. a, b, c, d jsou kladná, $a = b$, $c < d$
   z lemmatu o násobení nerovnosti $c < d$ kladným číslem a plyne $ac < bd$, a tedy i $ac \leq bd$

3. a, b, c, d jsou kladná, $a = b$, $c = d$
   pak je $ac = bd$, a tedy i $ac \leq bd$

4. b nebo d je rovno nule
   z $b = 0$ plyne $a = 0$, a tedy $ac = 0 = bd$, a tedy i $ac \leq bd$; podobně pro $d = 0$

5. b a d jsou kladná a a nebo c je rovno nule
   vynásobíme nerovnost $b > 0$ kladným d a dostaneme $bd > 0$; protože je $ac = 0$, je $bd > ac$, a tedy i $bd \geq ac$

□

V lemmatu o umocňování nerovností jsme dokázali implikaci: jestliže platí $a < b$, pak platí $a^n < b^n$. Ve skutečnosti za uvedených předpokladů (a, b jsou nezáporná čísla) platí ekvivalence. Tu nyní dokážeme.

Lemma o umocňování coby ekvivalentní úpravě. Pro přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a nezáporná reálná čísla a, b je $a < b$ ekvivalentní s $a^n < b^n$.

[8] Viz poznámka o předpokladu a závěru.

Poznámka o specifickém matematickém jazyku. Lemma jsme zformulovali pokud možno jazykem, kterým se běžně vyjadřujeme. Domníváme se, že v tomto případě to nebylo na újmu přesnosti vyjádření. V matematických textech se spíše používá následující jazyk: „nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní $a < b$, $a^n < b^n$“. Při tvrzeních složitějších než je toto lemma je kvůli přesnosti takový jazyk nezbytností.

Důkaz lemmatu o umocňování coby ekvivalentní úpravě. Ekvivalenci dokazujeme jako dvě implikace. Implikaci $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ jsme dokázali výše v lemmatu o umocňování nerovností.

Dokážeme implikaci $a^n < b^n \Rightarrow a < b$ obměnou,[9] tedy dokážeme implikaci $a \geq b \Rightarrow a^n \geq b^n$. Pokud je $a = b$, pak je $a^n = b^n$, a tedy je $a^n \geq b^n$. Pokud je $a > b$, pak je $a^n > b^n$, a tedy je $a^n \geq b^n$. □

Poznámka o implikaci, jejím předpokladu a závěru.
V implikaci $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ nazýváme výrok $a > b$ předpokladem, výrok $a^n > b^n$ závěrem.

Všimněte si, že oslabením závěru nepřestává implikace platit – z platnosti $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ přímo plyne platnost $a > b \Rightarrow a^n \geq b^n$.

Na druhé straně oslabením předpokladu v platné implikaci můžeme dostat neplatné tvrzení. Implikace $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ platí, ale implikace $a \geq b \Rightarrow a^n > b^n$ neplatí.[10]

Úkol. Všímejte si, jaké další vlastnosti reálných čísel používáte a odvoďte je z axiomů.

2.4 Supremum, infimum

Seznamte se z definicí horního odhadu, maxima, dolního odhadu a minima množiny v [2], definice 1.3.4, poznámka 1.3.5.

TODO PŘÍKLADY

[9] Implikaci „jestliže neplatí B, pak neplatí A“ nazýváme *obměněnou implikací* k „jestliže platí A, pak platí B“. Například: „jestliže máte z předmětu zkoušku, pak máte z předmětu i zápočet“ a „jestliže nemáte z předmětu zápočet, pak z něj nemáte ani zkoušku“. Srovnejte s *obrácenou implikací* „jestliže máte z předmětu zápočet, máte z něj i zkoušku“. Více viz kapitola o jazyku matematiky.

[10] Pokud se rádi s přáteli přete o rozličných tématech, dávejte pozor, zda tyto zásady o oslabení/zesílení předpokladu a závěru v diskuzi vy nebo vaši přátelé dodržujete.

Definice 1.3.6 – zdola omezená množina, shora omezená množina, omezená množina.

Definice 1.3.8 – supremum, infimum množiny.

TODO PŘÍKLADY

Lemma o supremu a infimu „oddělených“ množin. Pokud pro dvě množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$ platí

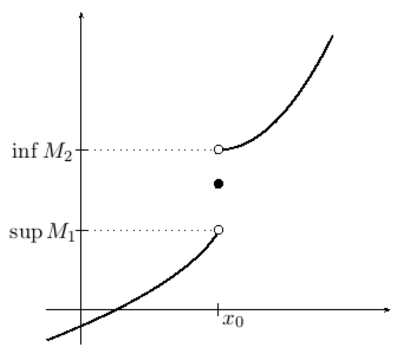
$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$$

pak platí $\sup A \leq \inf B$.

Doporučení: před čtením důkazu nakreslete číselnou osu a několik prvků množiny A i B splňujících uvedenou vlastnost.

Důkaz. Uvažujme libovolné $b \in B$. Z předpokladů lemmatu plyne, že b je horní závorou množiny A. Supremum množiny A je nejmenší horní závora, a proto platí $b \geq \sup A$ a platí to pro všechna $b \in B$. Odtud plyne, že $\sup A$ je dolní závora množiny B a odtud plyne $\sup A \leq \inf B$, protože infimum je největší dolní závora. $\square$

Ukážeme si dva případy použití lemmatu.



Uvedený obrázek je z kapitoly věnované limitám funkcí, kde ukazujeme existenci jednostranných limit monotonních funkcí. Na obrázku je graf rostoucí funkce. Nás budou zajímat množiny M_1, M_2 pro malé kladné δ

$$\begin{aligned} M_1 &= \{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\} \\ M_2 &= \{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\} \end{aligned}$$

Je-li funkce f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rostoucí, pak platí

$$(y_1 \in M_1, y_2 \in M_2) \Rightarrow y_1 < y_2$$

a z lemmatu o supremu a infimu oddělených množin plyne

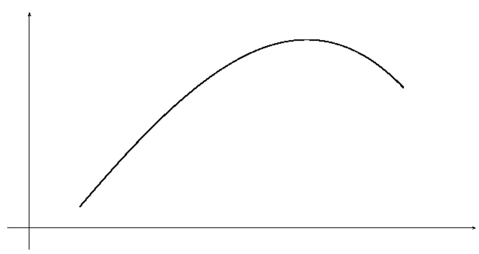
$$\sup M_1 \leq \inf M_2 \tag{2.1}$$

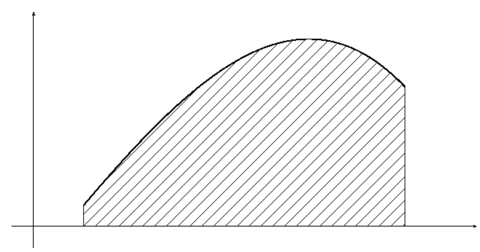
Na obrázku jsou hodnoty $\sup M_1$, $\inf M_2$ vyznačeny na ose y a nerovnost je znázornněna jejich vzájemnou polohou.

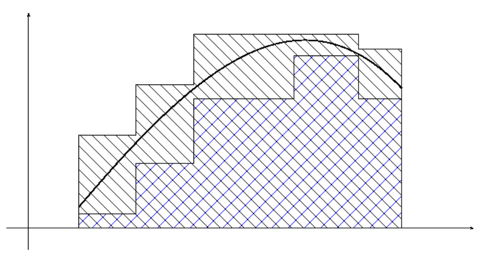
V tomto příkladě můžeme místo lemmatu o supremu a infimu oddělených množin použít hodnotu $f(x_0)$, která je horní závorou množiny M_1 a dolní závorou množiny M_2. Odtud plyne $\sup M_1 \leq f(x_0)$ a $\inf M_2 \geq f(x_0)$ a tedy i nerovnost (2.1).

Otázka. Z čeho plyne výše uvedené tvrzení, že je $f(x_0)$ horní závorou množiny M_1 a dolní závorou množiny M_2?

Další dva obrázky se týkají *Riemannova integrálu.* Ten je pro kladnou funkci definován jako obsah plochy[11] pod jejím grafem. Na obrázku vlevo je graf funkce a k němu je na obrázku vpravo vyšrafovaná plocha pod ním.







Její obsah odhadneme zdola a shora obsahem plochy, jejíž obsah umíme spočítat. Jsou to mnohoúhelníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami, jejich příklady vidíte na obrázku vlevo.

Obsah obdélníků pod grafem (jsou vyšrafovány modře) nazýváme *dolním Riemannovým integrálním součtem.* Obsah obdélníků nad grafem nazýváme *horním Riemannovým integrálním součtem.* Libovolný dolní integrální součet je nejvýše roven hornímu integrálnímu součtu.

Odtud a z lemmatu pak plyne, že supremum dolních integrálních součtů je nejvýše roven infimu horních integrálních součtů. Pokud se sobě rovnají, budeme jejich společnou hodnotu nazývat *riemannovým integrálem* zadané funkce na zadaném intervalu. Ukážeme si, že spojité omezené funkce mají na omezeném intervalu Riemannův integrál. Ukážeme si ale také příklad funkce, jejíž dolní Riemannův integrál je menší než horní Riemannův integrál. Tato

[11] Terminologická poznámka: na střední škole se zpravidla rozlišuje mezi *plochou* a jejím *obsahem.* Plocha je množina, například čtverec a obsah je číslo. Ve vysokoškolských učebnicích je běžné termínem plocha označovat její obsah, tedy číslo. My se v textu budeme držet středoškolské terminologie.

funkce tedy nemá Riemannův integrál.

Kapitola 3

Jazyk matematiky, výroky, množiny

Na webu je k dispozici text o logice, výrocích a množinách. Po přepracování sem bude vložen.

Následují články, které v textu chybí a rozšiřují ho.

3.1 Indukce, dedukce

Indukcí nazýváme postup, kdy z pozorování jednotlivostí děláme obecné závěry. Zpravidla přitom uvažujeme takto: za podobných okolností se v minulosti většinou stalo to a to, tak budeme předpokládat, že se to stane i nyní. Je ale potřeba zdůraznit, že tímto způsobem získáváme domněnku, nikoliv neoddiskutovatelnou pravdu. V matematice, na rozdíl od běžného života, ostře odlišujeme domněnky od tvrzení. U každého tvrzení (nazýváme je *větami*) požadujeme důkaz.

Jeden typ důkazu nazýváme *matematickou indukcí*. Používáme ho pro důkazy tvrzení o přirozených číslech. TODO

Dedukce je naopak odvozování jednotlivostí z obecných tvrzení. V matematice je tento způsob uvažování typický v odvozování dalších vlastností z axiomů.

Kapitola 4

Aritmetika a funkce

Budeme se zabývat funkcemi, k jejichž definici stačí aritmetické operace. Jsou to polynomy[1] a podíly polynomů[2]. Na těchto funkcích vyložíme vlastnosti funkcí jako sudost, lichost, monotonii a řekneme, co je obor hodnot funkce.

Dále se budeme zabývat inverzní funkcí. Vysvětlíme, jak souvisí inverzní funkce s rovnicí s parametrem. Speciálně budeme pomocí inverzní funkce definovat odmocniny.

4.1 Mocniny s přirozeným exponentem

Zápis $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\times}$ můžeme chápat jako zkratku. Tato zkratka vede přímočaře k následující definici a^n pro $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$a^1 = a \quad \text{a pro } n \geq 2 \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \tag{4.1}$$

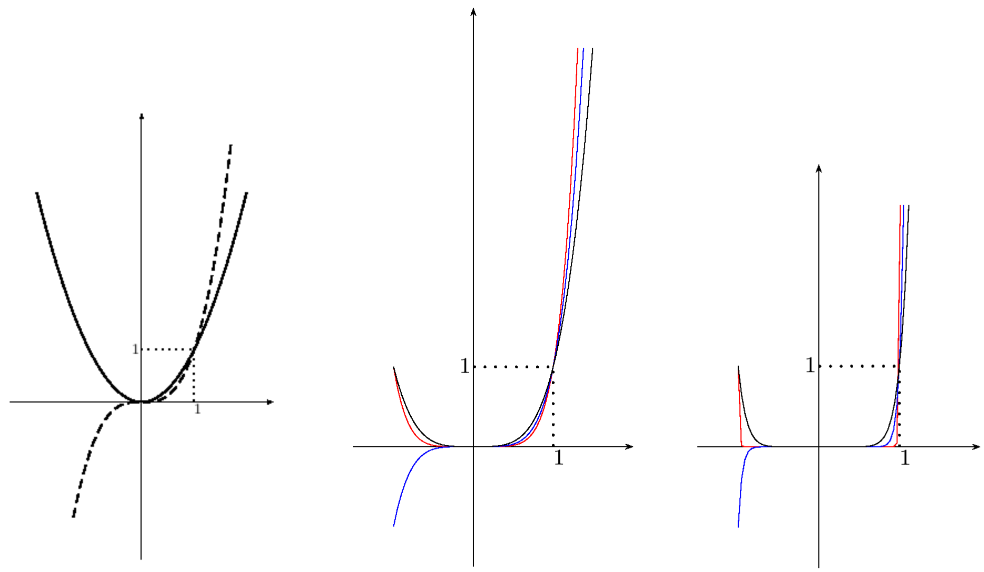
Číslo a nazýváme *základem* mocniny a číslo n *exponentem*.

Funkci $x \mapsto x^n$ nazýváme *mocninnou funkcí*.[3] V celém článku (4.1) budeme uvažovat mocninné funkce jen s kladnými přirozenými exponenty.

4.1.1 Grafy mocninných funkcí

Na následujících obrázcích jsou grafy mocninných funkcí. Vlevo plnou čarou pro exponent $n = 2$ a čárkovanou pro $n = 3$.

[1] Český termín pro polynomy je mnohočleny.
[2] Podíly polynomů nazýváme racionálními funkcemi.
[3] Funkci $x \mapsto a^x$ nazýváme exponenciální funkcí.

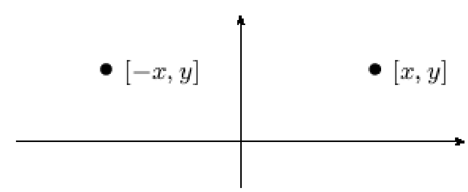


Uprostřed černě pro $n = 4$, modře pro $n = 5$ a červeně pro $n = 6$. Vpravo černě pro $n = 10$, modře pro $n = 21$ a červeně pro $n = 100$.

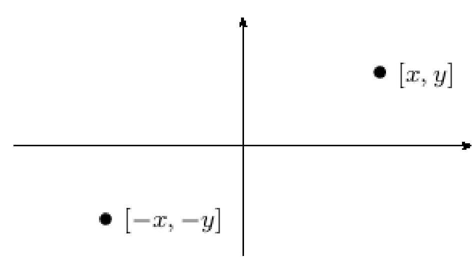
Všechny mocninné funkce jsou definované na množině reálných čísel (tj. jejich definiční obor je $\mathbb{R}$).

4.1.2 Sudost, lichost

Pro sudé n je $(-x)^n = x^n$.
Na grafu se tato vlastnost projeví jako symetrie vzhledem k ose y:
leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce,
pak i bod $[-x, y]$ leží na grafu funkce.



Pro liché n je $(-x)^n = -x^n$.
Na grafu se tato vlastnost projeví jako symetrie vzhledem k počátku:
leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce,
pak i bod $[-x, -y]$ leží na grafu funkce.



Tyto vlastnosti mocninných funkcí vedou k definici sudé a liché funkce.

Definice sudé funkce. Funkci f nazveme *sudou funkcí*, pokud pro každé x

z jejího definičního oboru platí: f je definovaná v $-x$ a $f(-x) = f(x)$.
Po označení definičního oboru funkce f symbolem D definici formálně zapíšeme

$$(\forall x \in D)(-x \in D \wedge f(-x) = f(x))$$

Definice liché funkce. Funkci f nazveme *lichou funkcí*, pokud pro každé x z jejího definičního oboru platí: f je definovaná v $-x$ a $f(-x) = -f(x)$.
Definici formálně zapíšeme

$$(\forall x \in D)(-x \in D \wedge f(-x) = -f(x))$$

4.1.3 Monotonie

Z kapitoly 2 o číslech víme, že pro nezáporná a, b splňující $a < b$ a přirozené kladné n platí $a^n < b^n$. Toto tvrzení lze zapsat pomocí implikace

$$\text{pro kladné přirozené } n \text{ platí } (\forall a, b \in [0, +\infty))(a < b \Longrightarrow a^n < b^n)$$

Níže připomeneme definici funkce rostoucí na množině. Výše uvedený výrok znamená, že mocninná funkce je rostoucí na intervalu $[0, +\infty)$.

Definice rostoucí funkce. Řekneme, že je funkce f *rostoucí na množině* $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

Ukážeme, že pro lichý exponent je mocninná funkce rostoucí na $\mathbb{R}$. Máme tedy ukázat platnost výroku

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n)$$

Rozebereme postupně čtyři případy: 1) $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 2) $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in [0, +\infty)$ 3) $x_1 \in [0, +\infty)$, $x_2 \in (-\infty, 0)$ 4) $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$

První případ jsme rozebrali výše.

V druhém případě je pravdivý i předpoklad $x_1 < x_2$ i závěr $x_1^n < x_2^n$ implikace, takže je implikace pravdivá.

Ve třetím případě není pravdivý ani předpoklad ani závěr implikace a implikace je tedy pravdivá.

Rozebereme čtvrtý případ:
Je-li $x_1 < x_2$, je $-x_2 < -x_1$ a $-x_1, -x_2 \in (0, +\infty)$. Protože je mocninná

funkce na $(0, +\infty)$ rostoucí, plyne odtud $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. Pro lichý exponent upravíme na $-(x_2^n) < -(x_1^n)$ a dále na $x_1^n < x_2^n$.

Proto pro $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ platí implikace $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n$.

Úkoly.

1. Ukažte, že pro sudé n platí

$$(\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0])(x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n > x_2^2)$$

   Funkci splňující tento výrok nazýváme *klesající na množině* $(-\infty, 0]$.

2. Napište definici funkce klesající na množině M.

4.1.4 Obor hodnot

Ze střední školy víte, že mocninné funkce mají pro lichý exponent obor hodnot roven množině reálných čísel a pro sudý exponent množině nezáporných reálných čísel. My se zde zamyslíme, co tato tvrzení znamenají. Nejdříve připomeneme definici oboru hodnot funkce.

Defince oboru hodnot. Pro funkci f s definičním oborem D nazýváme *oborem hodnot* množinu jejích funkčních hodnot, tedy množinu

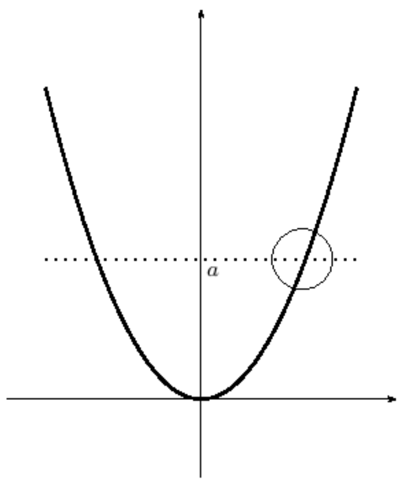
$$H(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

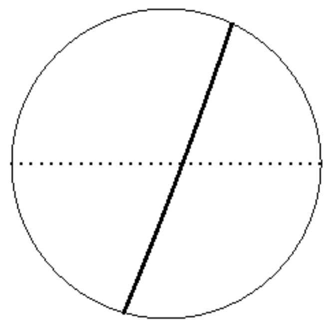
Jak zjistíme z grafu funkce, že číslo $a \in \mathbb{R}$ leží v oboru hodnot funkce? Sestrojíme přímku o rovnici $y = a$ a zjistíme, zda má s grafem společný alespoň jeden bod. Pokud ano, pak leží a v oboru hodnot funkce.[4]

Na obrázku je graf funkce $x \mapsto x^2$ a přímka o rovnici $y = a$ pro $a > 0$. Průsečík grafu[5] a přímky má x-ovou souřadnici vyhovující rovnici $x^2 = a$.

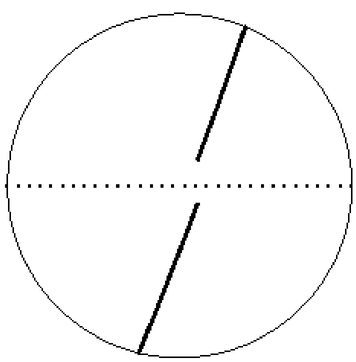
[4] A pokud ne, tak a v oboru hodnot neleží.

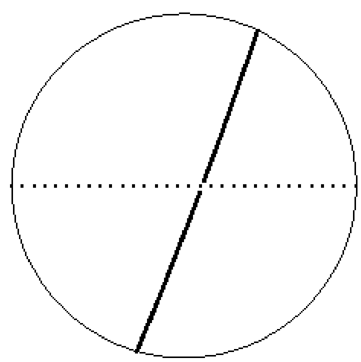
[5] Grafem je parabola.





Na následujících obrázcích bychom rádi zpochybnili samozřejmost existence takových průsečíků. Bude nás zajímat, co se stane, zvětšíme-li výřez s průsečíkem, jako na obrázku vpravo nahoře. Když budeme uvažovat nějaký hmotný objekt, třeba papír, na kterém právě čtete tyto řádky[6], tak z fyziky víte, že pro naše oči a náš hmat pevná hmota se při velkém zvětšení přemění na malinké atomy, které se skládají z ještě mnohem menšího jádra obklopeného prázdnem vyplněným ještě menšími elektrony.[7] Nemůže se stát něco podobného při zvětšení okolí průsečíku?





Na obrázcích je vyznačeno, co by se mohlo při zvětšení stát: na levém je v grafu mezera okolo přímky $y = a$ a přímka tedy s grafem nemá průsečík. Na obrázku vpravo sice mezera není, ale v grafu chybí právě ten bod, ve

[6] případně elektronické zařízení, ze kterého čtete

[7] Zjistěte kolikrát je atomové jádro menší než atom.

kterém by se s ním přímka protnula.

V následujícím textu ukážeme, že pro mocninnou funkci při sebevětším zvětšení ani jeden z obrázků nenastane. Důsledkem bude existence průsečíku a tedy existence odmocniny.

4.1.5 Spojitost

Ukážeme, že v grafu mocninné funkce nemůže vzniknout mezera. Upravíme rozdíl funkčních hodnot

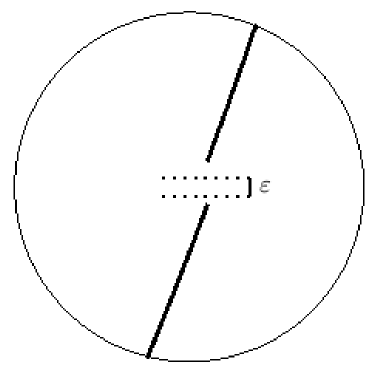
$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$$

Budeme uvažovat a, b z intervalu $I = [0, M]$. Pak je

$$b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1} \le nM^{n-1}$$

a tedy

$$b^n - a^n \le nM^{n-1}(b-a)$$



Volbou dostatečně malého $b-a$ můžeme udělat b^n-a^n menší než libovolně zadané kladné ε. Proto nemůže nastat situace na obrázku.

4.1.6 Mocninná funkce na racionálních číslech

TODO

4.1.7 Vlastnost suprema reálných čísel

TODO: PROČ NEMŮŽE NASTAT DRUHÝ OBRÁZEK Z PŘEDCHOZÍ STRANY

4.2 Odmocniny

Definice. Pro $a \in [0, +\infty)$ a sudé $n \ge 2$ definujeme *n-tou odmocninu z a* jako nezáporný kořen rovnice $x^n = a$. Značíme ji $\sqrt[n]{a}$. Pro $n = 2$ zpravidla značíme stručněji $\sqrt{a}$ a vynecháváme přívlastek druhá.

Úkoly.

1. Načrtněte graf funkce $x \mapsto x^2$ a určete graficky druhou odmocninu z pěti.

2. Ukažte, že je odmocnina z pěti definovaná jednoznačně a vysvětlete, jak to plyne z monotonie mocninné funkce.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ a liché $n \geq 3$ definujeme *n-tou odmocninu z a* jako kořen rovnice $x^n = a$. Značíme ji $\sqrt[n]{a}$.

Úkoly.

1. Načrtněte pro vhodné n graf funkce $x \mapsto x^n$ a zvolte reálné číslo a a určete graficky n-tou odmocninu z a. Volte sudé i liché n a ke každému n kladné, záporné i nulové a.

2. Ukažte, že odmocnina je definovaná jednoznačně a vysvětlete, jak to plyne z monotonie mocninné funkce.

3. Načrtněte grafy funkcí $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

4.3 Inverzní funkce

V předchozím odstavci jsme definovali odmocninu z a jako kořen rovnice $x^n = a$ s neznámou x a parametrem a.

Pro lichý exponent má rovnice $x^n = a$ nejvýše jeden kořen. Funkci s touto vlastností nazýváme prostou funkcí, viz následující definice.

Definice prosté funkce. Funkci f nazveme *prostou funkcí*, pokud pro každou dvojici x_1, x_2 z jejího definičního oboru platí implikace

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Lemma o jednoznačnosti vzorů prosté funkce. Nechť je funkce f prostá. Pak má rovnice $f(x) = a$ s neznámou x a parametrem a pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ nejvýše jeden kořen.

Důkaz. Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kořeny rovnice $f(x) = a$, pak platí $f(x_1) = f(x_2)$. Protože předpokládáme, že je funkce f prostá, plyne odtud $x_1 = x_2$. Proto má rovnice $f(x) = a$ nejvýše jeden kořen.

Důsledek. Je-li f prostá funkce, pak má rovnice $f(x) = a$ jeden kořen pro a z oboru hodnot funkce f a nemá žádný kořen pro ostatní a.

TODO: ODMOCNINA JAKO INVERZNÍ FUNKCE, ZÚŽENÍ FUNKCE

4.4 Příklady

Souvislost prosté funkce, inverzní funkce a oboru hodnot předvedeme na následujících příkladech.

TODO: KVADRATICKÁ FUNKCE, LINEÁRNĚ LOMENÁ FUNKCE

4.5 Další příklad

Pojem inverzní funkce vysvětlíme na následujícím příkladě. Budeme řešit rovnici[8] s neznámou x a parametrem y

$$y = 2x + \sqrt{4x^2 - 2x}$$

Osamostatníme odmocninu a umocníme

$$\begin{aligned} y - 2x &= \sqrt{4x^2 - 2x} \\ (y - 2x)^2 &= 4x^2 - 2x \\ y^2 - 4xy + 4x^2 &= 4x^2 - 2x \end{aligned}$$

Všimněte si, že kvadratický člen $4x^2$ se odečte a dostaneme lineární rovnici

$$\begin{aligned} y^2 &= 4xy - 2x \\ y^2 &= x(4y - 2) \\ x &= \frac{y^2}{4y - 2} \end{aligned}$$

Pro $y = 1/2$ nemůžeme udělat poslední úpravu. Pro toto y má rovnice před úpravou tvar $1/4 = 0$, nemá tedy řešení. Pro $y \neq 1/2$ jsme dostali kořen $x = y^2/(4y-2)$. Během řešení rovnice jsme umocňovali, proto je nyní potřeba ověřit, zda námi nalezené kořeny jsou opravdovými kořeny. Ukážeme dva způsoby, jak to zjistit.

[8] Pokud vám přijde taková úloha těžká, dosaďte za parametr konkrétní číslo a rovnici vyřešte. Dělejte to tak dlouho, dokud to pro vás nebude opravdu snadné. Pak se stejným postupem pusťte do rovnice s parametrem.

1. Uděláme zkoušku – dosadíme postupně do levé i pravé strany a upravíme

$$
\begin{aligned}
L &= y-2x = y-\frac{2y^2}{4y-2} = y-\frac{y^2}{2y-1} = \frac{y^2-y}{2y-1}\\
P &= \sqrt{4x^2-2x} = \sqrt{\frac{4y^4}{(4y-2)^2}-\frac{2y^2}{4y-2}} = \sqrt{\frac{y^4}{(2y-1)^2}-\frac{y^2}{2y-1}}\\
&= \sqrt{\frac{y^4-y^2(2y-1)}{(2y-1)^2}} = \sqrt{\frac{y^4-2y^3+y^2}{(2y-1)^2}} = \sqrt{\frac{(y^2-y)^2}{(2y-1)^2}} =\\
&= \frac{|y^2-y|}{|2y-1|}
\end{aligned}
$$

   Vidíme, že $L=P$ v případě $(y^2-y)/(2y-1)\geq 0$, tedy pro[9] $y\in[0,1/2)\cup[1,+\infty)$.

2. Část dosazování a úprav jsme si mohli odpustit, pokud bychom si uvědomili, že umocňování přidává kořen v případě, že mají umocňované strany rovnice opačná znaménka. Na pravé straně je odmocnina, která nabývá nezáporných hodnot. Proto má rovnice řešení právě v případě, že je i levá strana nezáporná, tedy $y-2x\geq 0$. Odtud dostaneme stejný výsledek jako v předchozím postupu.

ZÁVĚR: rovnice má pro $y\in[0,1/2)\cup[1,+\infty)$ kořen $x=y^2/(4y-2)$. Pro ostatní y nemá rovnice řešení.

Řešením rovnice jsme získali inverzní funkci k funkci[10]

$$f: x\mapsto 2x+\sqrt{4x^2-2x},\quad x\in(-\infty,0]\cup[1/2,+\infty) \tag{4.2}$$

Touto inverzní funkcí je[11]

$$f^{-1}: y\mapsto \frac{y^2}{4y-2},\quad y\in[0,1/2)\cup[1,+\infty)$$

Definice. Nechť je zadaná funkce f. Řekneme, že k ní existuje inverzní funkce, pokud má rovnice $y=f(x)$ nejvýše jeden kořen. Funkci, která y přiřadí tento kořen, nazýváme *inverzní funkcí* k funkci f a značíme ji f^{-1}.

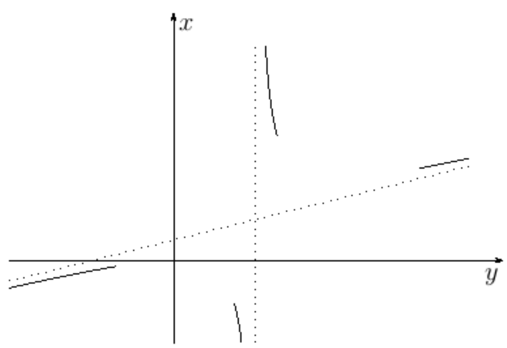
[9] Vyřešení této nerovnice necháme na čtenáři.
[10] Definiční obor jsme určili z podmínek – odmocňujeme jen nezáporná čísla.
[11] Zde jsou definičním oborem ta y, pro něž má rovnice $y=f(x)$ řešení.

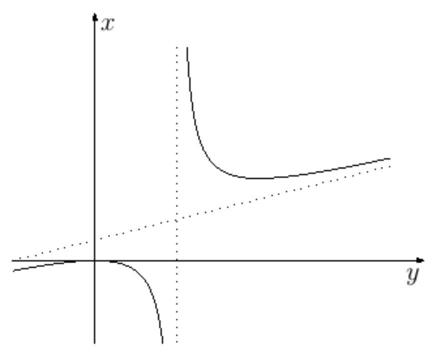
Našim dalším cílem je načrtnout grafy obou funkcí z předchozího příkladu. Začneme úpravou

$$\frac{y^2}{4y-2} = y^2 : (4y-2) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{8} + \frac{1}{16y-8}$$

Budeme kreslit závislost x na y. Protože je zde y nezávisle proměnná, prohodíme osy, tedy vodorovně nakreslíme osu y a svisle osu x.[12] Na obrázku vlevo je tečkovaně nakreslená přímka $x = y/4 + 1/8$ a přímka $y = 1/2$. Plnou čarou kreslíme závislost x na y. K $y/4 + 1/8$ přičítáme $1/(16y - 8)$ a to je pro $y \to -\infty$ malé záporné, pro $y \to 1/2^-$ velké záporné, pro $y \to 1/2^+$ velké kladné a pro $y \to +\infty$ malé kladné.

Na obrázku vpravo jsme plné čáry spojili. Prozradíme, že vzniklá křivka je hyperbola. Všimněte si ještě, že se hyperbola v okolí počátku zespoda dotýká osy y. Je to tím, že pro $y = 0$ je $x = 0$ a pro y z okolí nuly je $x = y^2/(4y - 2) \leq 0$.





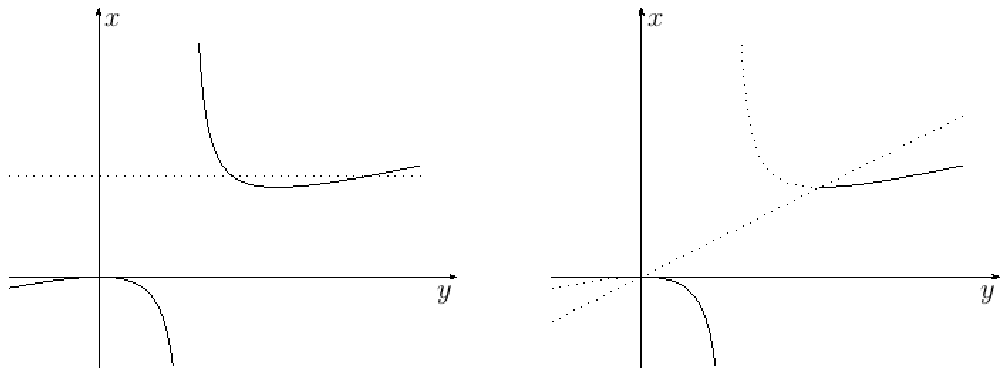
Na obrázcích dole je hyperbola bez pomocných přímek.[13] Tečkovaná přímka na obrázku vlevo znázorňuje, že pro některá x je na hyperbole více než jedno y. To je v rozporu s tím, že závislost x na y je inverzní funkcí k závislosti

$$x \mapsto y = 2x + \sqrt{4x^2 - 2x}$$

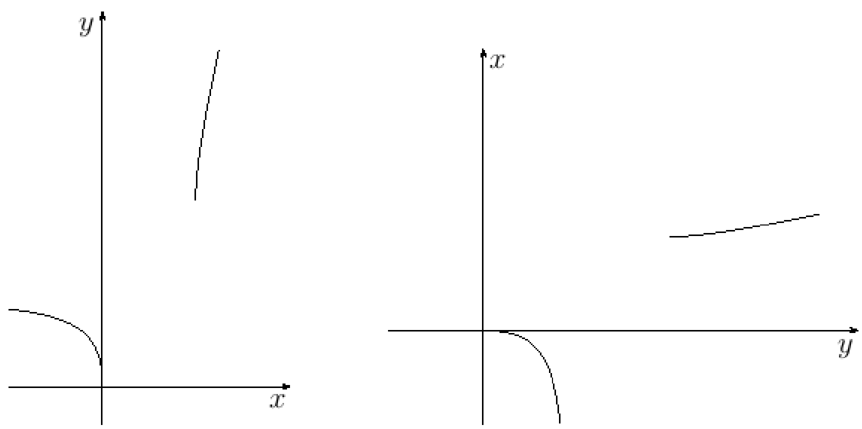
Na obrázku vpravo je hyperbola rozdělena přímkou $y = 2x$ na dvě části. Plnou čarou je nakreslena část hyperboly v polorovině $y \geq 2x$ a tečkovanou v polorovině $y \leq 2x$.

[12]Volba polohy os je naše rozhodnutí.

[13]Nazýváme je asymptoty.



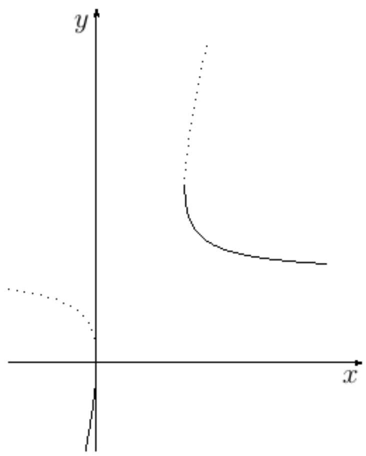
Plná část hyperboly na obrázku vpravo nahoře znázorňuje graf funkce f z (4.2). Pokud se vám nelíbí prohozené osy, můžete je vyměnit zpět. Na následujících obrázcích je vlevo graf funkce f a vpravo graf funkce k ní inverzní.[14]

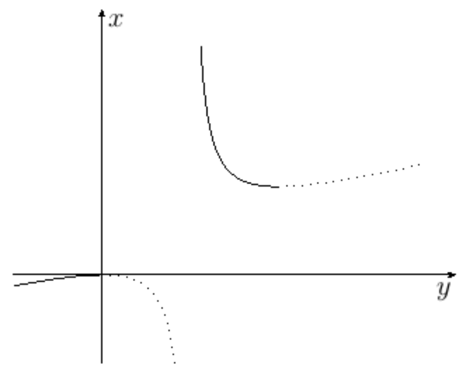


Na posledním obrázku níže je plnou čarou graf funkce g s opačným znaménkem u odmocniny a graf funkce k ní inverzní g^{-1}. Tečkovaně jsou zakresleny grafy výše studovaných funkcí f, f^{-1}.

$$g : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2 - 2x}$$

[14]Pokud funkce f přiřadí proměnné x proměnnou y, pak inverzní funkce přiřadí naopak proměnné y proměnnou x. Na základních a středních školách je zpravidla vyžadováno u inverzní funkce přejmenování, my je zde neděláme, považujeme je za nepřínosné a naopak spíše matoucí.





4.6 Polynomy

TODO: Definice, stupeň, nulový polynom, kořen polynomu, dělení polynomů, rozklad polynomu na kořenové činitele. Nerozložitelné polynomy v oboru komplexních čísel, v oboru reálných čísel. Maximální počet kořenů polynomu, rovnost polynomů.

Nerozlozložitelné polynomy v komplexním oboru jsou lineární polynomy (viz přednáška z algebry). Nerozlozložitelnými polynomy v reálném oboru jsou i některé kvadratické polynomy – viz články 16.1., 16.2. z dodatku o komplexních číslech.

Otázky. Kolik reálných kořenů může mít kvadratická rovnice? Kolik kubická rovnice? Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše pět s reálnými koeficienty $a_0,\ldots,a_5$?

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše n s reálnými koeficienty $a_0,\ldots,a_n$?

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Otázka. Kolik kořenů $x \in \mathbb{R}$ má rovnice v závislosti na hodnotách a, b? Má pro nějaké hodnoty a, b více jak jeden kořen?

$$ax + b = 0$$

Otázka. Který z následujících polynomů nelze v reálném oboru rozložit na součin polynomů nižších stupňů? Takovým polynomům budeme říkat nerozložitelné polynomy.

$$x^2 + x + 1 \qquad x^2 - x - 1 \qquad x^3 + 1 \qquad x^4 + 1$$

Úkol. Upravte polynomy na součin v reálném oboru nerozložitelných polynomů.

$$x^3 + 8 \qquad x^5 - 32 \qquad x^3 + 2x - 3 \qquad x^8 - 1$$

4.7 Racionální funkce

TODO: Definice, ryze lomená racionální funkce. Parciální zlomky, rozklad racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků.

Úkoly. Vyjádřete výrazy jako součet polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{x^3}{x^2+1} \qquad \frac{-x^2+2}{x^2-1} \qquad \frac{3x^2+x+2}{x^3-4x+3} \qquad \frac{1}{x^3(x^2+1)} \qquad \frac{x^3}{(x^2+x+3)^2}$$

Kapitola 5

Posloupnosti

Posloupnost je speciálním případem funkce, jejíž definiční obor je nejčastěji množina přirozených čísel a grafem je množina izolovaných bodů. Značení a terminologii přebíráme z [2], ze začátku druhé kapitoly. Doporučujeme čtenáři přečíst vše až k definici 2.1.6 limity posloupnosti a z dalšího definici 2.1.12 monotonní posloupnosti, definici 2.1.14 aritmetické a geometrické posloupnosti, poznámku 2.1.15 o souvislosti těchto posloupností s aritmetickým a geometrickým průměrem.

Protože je pojem limity posloupnosti obtížný, předřadíme mu v článcích 5.1, 5.2 několik příkladů monotonních posloupností, u kterých je význam pojmu limity, česky meze, přirozený a vyslovíme definici limity pro monotonní posloupnosti.

V následujícím článku 5.3 se budeme věnovat definici limity pro obecnou, tedy nejen monotonní, posloupnost a podrobně ji rozebereme. Hloubavějšímu čtenáři doporučujeme přečíst poznámku 2.1.7 v [2].

V dalších článcích pak probereme další pojmy a věty z [2].

5.1 Příklady monotonních posloupností

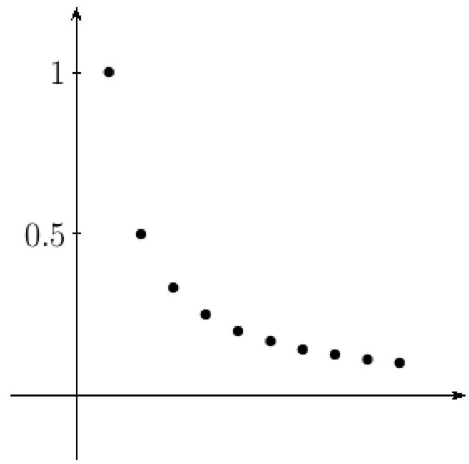
Uvedeme příklady monotonních posloupností, jejich grafy a tabulky s vyčíslenými členy posloupnosti.

Za nimi pak následuje definice limity monotonní omezené posloupnosti.

5.1.1 Převrácená hodnota

Vpravo je graf posloupnosti $\{1/n\}$, v tabulce je vyčísleno a zaokrouhleno na tisíciny několik jejích prvních členů.

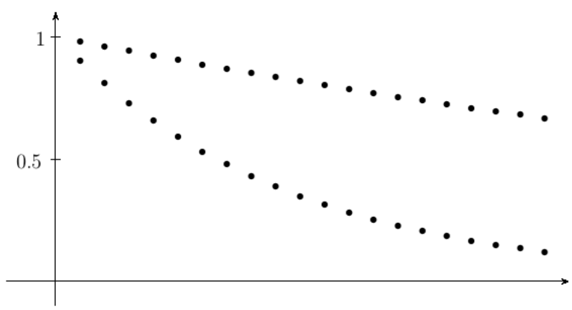
n	1	2	3	4
$1/n$	1	0.5	0.333	0.25
n	5	6	7	8
$1/n$	0.2	0.167	0.143	0.125
n	9	10	11	12
$1/n$	0.111	0.1	0.091	0.083

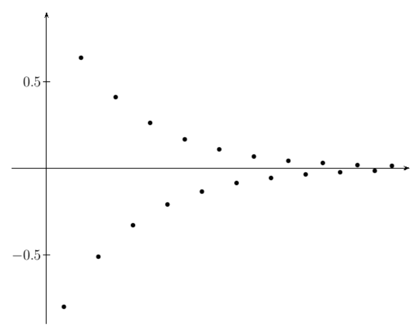


Úkol. Ukažte, že je posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

5.1.2 Geometrická posloupnost

Na obrázcích jsou grafy geometrických posloupností $\{0.98^n\}$, $\{0.9^n\}$, $\{(-0.8)^n\}$. První dvě jsou klesající, třetí není monotonní.





Úkoly.

1. Vysvětlete, proč jsou posloupnosti $\{0.98^n\}$, $\{0.9^n\}$ klesající a proč není posloupnost $\{(-0.8)^n\}$ monotonní.
2. Vyčíslete několik členů geometrických posloupností. Nevyťukávejte čísla na kalkulačce, použijte nějaký nástroj, který vám na jeden příkaz vypočte více členů. Například tabulkový procesor (excel nebo calc) nebo zadejte WolframAlpha příkaz `Table[0.98^n,{n,10}]`.

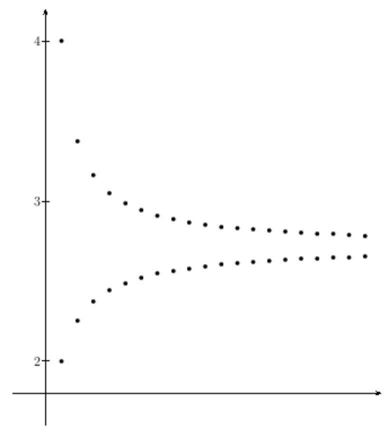
5.1.3 Eulerovo číslo

Na obrázku jsou grafy dvou posloupností, „níže“ graf posloupnosti

$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

a „výše“ graf posloupnosti

$$b_n = (1 + 1/n)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Z obrázku odvodíme hypotézu, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, posloupnost $\{b_n\}$ klesající a že pro $n \in \mathbb{R}$ platí $a_n < b_n$.

Pojďme zjistit, zda naše hypotézy platí. Nejdříve se budeme zabývat tím, zda je posloupnost $\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí. Při zvětšení čísla n se hodnota výrazu $1 + 1/n$ zmenší, na druhou stranu se hodnota mocniny se základem větším než jedna při umocnění na větší exponent zvětší. Nelze tedy na první pohled rozhodnout, zda je větší $(1+1/n)^n$ nebo $(1+1/(n+1))^{n+1}$. Použitím binomické věty dostaneme

$$(1 + \tfrac{1}{n})^n = 1 + n\tfrac{1}{n} + \tfrac{n(n-1)}{2}\tfrac{1}{n^2} + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\tfrac{1}{n^3} + \cdots + \tfrac{1}{n^n}$$

a po úpravě

$$(1 + \tfrac{1}{n})^n = 1 + 1 + \tfrac{1}{2}(1 - 1/n) + \tfrac{1}{6}(1 - 1/n)(1 - 2/n) + \cdots \tag{5.1}$$

Při zvětšení n o jedna se všechny členy $1 - 1/n$, $1 - 2/n \ldots$ zvětší a na konci přibude kladný člen $1/(n + 1)^{n+1}$. Takže jsme úvahou dokázali, že je posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Další možností, jak toto dokázat, je použití ag nerovnosti. Podrobnosti najde čtenář v závěru kapitoly této nerovnosti věnované. Dále je tam ukázáno, že je rostoucí i posloupnost $\{(1-1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ a tento fakt nám pomůže ukázat, že je klesající posloupnost $\{b_n\}$. Upravujme

$$\tfrac{1}{b_n} = \tfrac{1}{(1+1/n)^{n+1}} = \tfrac{1}{((n+1)/n)^{n+1}} = (n/(n + 1))^{n+1} = (1 - 1/(n + 1))^{n+1}$$

Odtud plyne

$$1/b_n < 1/b_{n+1}$$

a protože jsou členy posloupnosti $\{b_n\}$ kladné, tak odtud plyne

$$b_{n+1} < b_n$$

a tedy naše hypotéza, že je posloupnost $\{b_n\}$ klesající, je platná.

Třetí tvrzení hypotézy $a_n < b_n$ je snadno vidět.

Úkol. Odvoďte vztah $a_n < b_n$ z axiomů reálných čísel. Které axiomy použijete?

Úkol. Vyčíslete několik členů posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Opět použijte nástroj zmiňovaný výše. WolframAlpha tentokrát zadejte příkazy

```
Table[N[(1+1/n)^n],{n,10}]
Table[N[(1+1/n)^(n+1)],{n,10}]
```

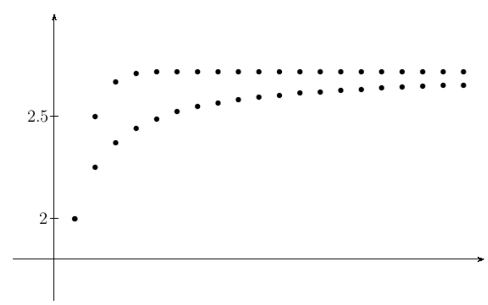
Všimněme si ještě vztahu (5.1). Pokud na pravé straně nahradíme závorky $(1 - 1/n)$, $(1 - 2/n)$, ... jedničkou, tak hodnotu výrazu na pravé straně zvětšíme. Proto platí

$$(1 + \tfrac{1}{n})^n < 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \cdots + \tfrac{1}{n!} \tag{5.2}$$

Na dalším obrázku je graf posloupnosti $\{a_n\}$ s grafem posloupnosti

$$c_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}$$

Všimněte si, že člen c_n získáme přičtením výrazu $1/n!$ k předchozímu členu. Tedy $c_n = c_{n-1} + 1/n!$.



Přidáme-li k tomuto vztahu ještě hodnotu prvního členu posloupnosti, lze s jeho pomocí spočítat opakovaným dosazováním hodnotu libovolného členu. Takový způsob zadání posloupnosti nazýváme *rekurentní.*

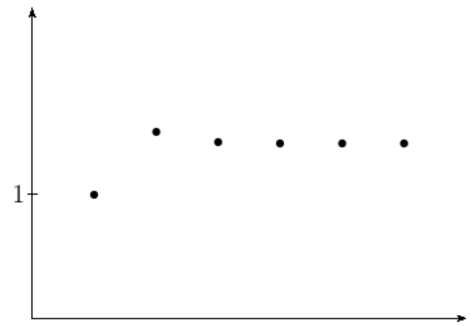
$$c_1 = 2, \qquad c_n = c_{n-1} + 1/n!. \tag{5.3}$$

Úkol. Vyslovte na základě grafu hypotézu o monotonii posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a poté ji dokažte úvahou.

5.1.4 Odmocnina

Na obrázku je graf rekurentně zadané posloupnosti

$$a_1 = 1,\ a_n = \tfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + 2/a_{n-1}\right) \quad (5.4)$$



Je vidět, že není monotonní, protože je $a_1 < a_2$ a zároveň $a_2 > a_3$. V tabulce je vyčísleno a zaokrouhleno na osm desetinných míst prvních 6 členů posloupnosti.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	1.5	1.41666667	1.41421569	1.41421356	1.41421356

Z hodnot v tabulce uděláme hypotézu, že je posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ nerostoucí. K tomu, abychom zjistili, zda je hypotéza platná, upravíme rozdíl $a_n - a_{n+1}$ a budeme zkoumat, zda nabývá nezáporných hodnot.

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n + 2/a_n}{2} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}$$

Z příkladu na použití ag nerovnosti ve stejnojmenném dodatku je ukázáno, že je čitatel $a_n^2 - 2$ nezáporný. Z (5.4) je snadno matematickou indukcí vidět, že je a_n kladné. Odtud plyne nezápornost rozdílu $a_n - a_{n+1}$, a tedy i monotonie posloupnosti $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$.

Úkoly.

1. Vyčíslete několik členů posloupnosti (5.4). Nevyťukávejte čísla na kalkulačce, použijte například tabulkový procesor (excel nebo calc).

2. Zvolte $A > 0$ a vyčíslete několik členů posloupnosti

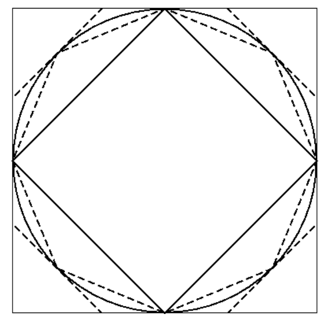
$$a_1 = 1, \qquad a_n = (a_{n-1} + A/a_{n-1})/2$$

3. Zvolte $A > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ a vyčíslete několik členů posloupnosti

$$a_1 = 1, \qquad a_n = ((p-1)a_{n-1} + A/a_{n-1}^{p-1})/p$$

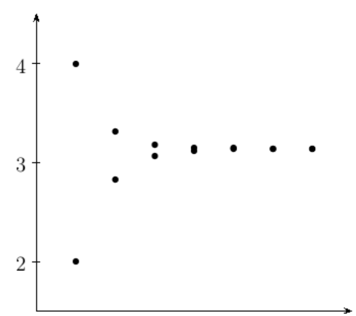
5.1.5 Ludolfovo číslo

Obsah kruhu můžeme odhadnout shora obsahem opsaného mnohoúhelníku a zdola obsahem vepsaného mnohoúhelníku. Na obrázku jsou plnou čarou ke kružnici nakresleny vepsaný a opsaný čtverec a čárkovaně osmiúhelníky. Z jejich vzájemné polohy plyne, že při zdvojení počtu hran se obsah opsaného mnohoúhelníku zmenší a obsah vepsaného zvětší.



V tabulce a na grafu vpravo jsou obsahy mnohoúhelníků opsaných a vepsaných jednotkové kružnici. Symbol O_n značí obsah opsaného n-úhelníku, symbol V_n obsah vepsaného n-úhelníku.

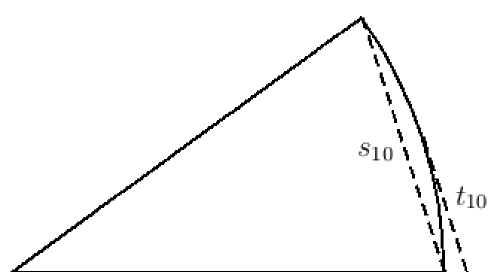
	n	O_n	V_n
1	4	4	2
2	8	3.314	2.828
3	16	3.183	3.061
4	32	3.152	3.121
5	64	3.144	3.137
6	128	3.1422	3.1403
7	256	3.1418	3.1413



K výpočtu obsahů jsme použili vzorce z úvodu [2]. Na straně 7 jsou odvozeny rekurentní vzorce pro stranu vepsaného n-úhelníku, která je zde označena s_n a polovinu strany opsaného n-úhelníku označenou t_n. My zde toto odvození probírat nebudeme. Ukážeme si jen, jak pomocí s_n a t_n vyjádřit obsahy obou n-úhelníků.

Na obrázku je výseč kruhu o poloměru jedna a úhlu $2\pi/10$.

Obsah O_{10} vypočteme jako desetinásobek obsahu trojúhelníku o základně $2t_{10}$ a jednotkové výšce. Vyjde $O_{10} = 10t_{10}$ a obecně



$$O_n = nt_n$$

Podobně vypočteme V_n jako n-násobek obsahu troúhelníku o základně s_n

a výšce, na jejíž výpočet použijeme Pythagorovu větu, $\sqrt{1 - s_n^2/4}$. Vyjde

$$V_n = \frac{ns_n\sqrt{1 - s_n^2/4}}{2}$$

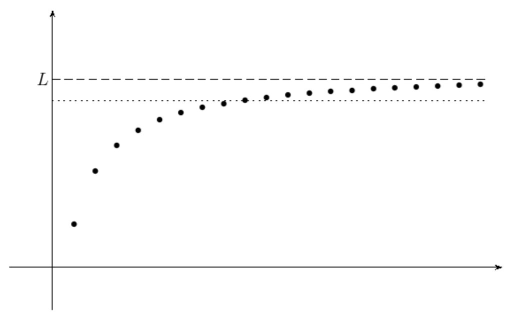
5.1.6 Limita monotonní posloupnosti

Uvedli jsme příklady monotonních omezených posloupností s jejich grafy a tabulkami hodnot. Při zvětšujícím se indexu posloupnosti (v příkladech značeném zpravidla n) se hodnoty členů posloupnosti blíží k nějaké určité mezní hodnotě. V případě rostoucí nebo neklesající posloupnosti zdola, v případě klesající nebo nerostoucí posloupnosti shora. Tuto mezní hodnotu budeme nazývat *limitou posloupnosti*.

Na obrázku je graf rostoucí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbolem L je na svislé ose vyznačena hodnota

$$L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Tečkovanou čarou je vyznačena hodnota $L' < L$.



Z definice suprema plyne, že L' není horní hranicí množiny hodnot členů posloupnosti $P = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. A protože není horní hranicí, je některý člen posloupnosti větší než L'. Formálně zapsáno

$$(\exists k \in \mathbb{N})(a_k > L')$$

Protože je posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, jsou větší i hodnoty členů následujících v posloupnosti za k-tým členem. Formálně zapsáno

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n > L') \tag{5.5}$$

A protože (5.5) platí pro libovolné $L' < L$, tak platí

$$(\forall L' < L)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n > L') \tag{5.6}$$

Přitom výrok (5.6) čteme: Ke každému $L' < L$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla n platí ... (tady začne být jazyk poněkud „kostrbatý“, můžeme dokončit třeba: platí implikace je-li n větší než k, pak je a_n větší než

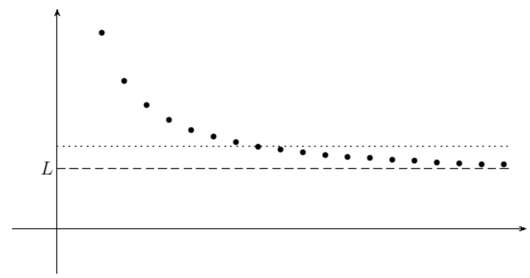
L'). Všimněte si, že jsme formulací „ke každému ... existuje ...“ sdělili, že číslo k závisí na čísle L'. V článku 5.3.3 tuto závislost rozebereme podrobněji.

Podobné je to s klesající posloupností.

Na obrázku je graf klesající posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Symbolem L je na svislé ose vyznačena hodnota

$$L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

a tečkovanou čarou je vyznačena hodnota $L' > L$.



Z definice infima plyne, že L' není dolní hranicí množiny hodnot členů posloupnosti. A protože není dolní hranicí, je některý člen posloupnosti menší než L'. Formálně zapsáno

$$(\exists k \in \mathbb{N})(a_k < L')$$

Protože je posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí, jsou menší i hodnoty členů následujících v posloupnosti za k-tým členem. Formálně zapsáno

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n < L') \tag{5.7}$$

A protože (5.7) platí pro libovolné $L' > L$, tak platí

$$(\forall L' > L)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n < L') \tag{5.8}$$

Úkol. Přečtěte výrok (5.8), stačí začátek.

5.2 Určení limit posloupností

V tomto článku se budeme znovu zabývat dříve zkoumanými posloupnostmi, konkrétně hodnotami jejich limit.

1. Převrácená hodnota: $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

   Většina čtenářů asi ví nebo intuitivně tuší, že limitou této posloupnosti je nula. My důkaz tohoto tvrzení uděláme hodně podrobně a doporučujeme čtenáři ať ho stejně pečlivě přečte a promyslí, protože mu to usnadní čtení důkazů pro další posloupnosti.

   Chceme ukázat, že $L = 0$ je infimum množiny členů posloupnosti $P = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. K tomu je potřeba ukázat:

(a) Nula je dolní závorou množiny P, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí $1/n \geq 0$. To je zřejmé.

(b) Libovolné $L' > L = 0$ není dolní závorou množiny P. To znamená, že existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $1/n < L'$. Vyřešením nerovnice dostaneme $n > 1/L'$. Pro nás není podstatná hodnota kořene nerovnice, ale jeho existence. Z existence kořene nerovnice plyne, že žádné $L' > 0$ není dolní závorou množiny.

Odtud plyne, že $L = 0$ je největší dolní závorou množiny P, tedy je infimem této množiny, a tedy je limitou posloupnosti $\{1/n\}$.

Závěr: limitou posloupnosti $\{1/n\}$ je $L = 0$.

Úkol. Do grafu posloupnosti $\{1/n\}$ zakreslete na svislou osu číslo $L' > 0$ a k němu nalezněte graficky kořeny nerovnice $1/n < L'$.

2. Geometrické posloupnosti $\{0.9^n\}$, $\{0.98^n\}$ a obecněji $\{q^n\}$ pro $q \in (0, 1)$.

Z grafu v článku 5.1.2 odhadneme, že $L = 0$ by mohlo být limitou posloupnosti $\{0.9^n\}$. U druhé posloupnosti $\{0.98^n\}$ si tím pravděpodobně tolik jisti nebudeme. Přesto ukážeme, že tomu tak je. Opět ve dvou krocích.

(a) Je zřejmé, že nula je dolní závorou množiny $P = \{0.98^n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Zvolíme $L' > 0$ a chceme ukázat, že toto L' není dolní závorou množiny P. Hledáme tedy $n \in \mathbb{N}$ splňující

$$0.98^n < L' \tag{5.9}$$

Předvedeme dva způsoby důkazu existence takového n.

První je převzat z [2], příklad 2.2.14. Nerovnici (5.9) upravíne na

$$(1/0.98)^n > 1/L'. \tag{5.10}$$

Dále použijeme odhad $1/0.98 > 1.02$ a z něj odvozené odhady (poslední nerovnost plyne z binomické věty, pro podrobnosti viz příslušný dodatek)

$$(1/0.98)^n > 1.02^n = (1 + 0.02)^n > 0.02n$$

Nerovnice $0.02n > 1/L'$ má kořeny $n > 50/L'$. Z výše uvedených odhadů plyne, že tyto kořeny splňují i nerovnici (5.10). A protože jsme (5.10) získali z (5.9) ekvivalentními úpravami, našli jsme kořeny (5.9).

Druhým způsobem důkazu předbíháme. V kapitole o funkcích si ukážeme použití monotonních funkcí na úpravy nerovnic. V tomto případě nerovnici (5.9) zlogaritmujeme. Dostaneme

$$\log 0.98^n < \log L'$$

a dalšími úpravami najdeme kořeny: $n > \log L' / \log 0.98$. Znaménko nerovnosti jsme otočili, protože je $\log 0.98$ záporné číslo.

V případě obecné geometrické posloupnosti $\{q^n\}$ s kvocientem $q \in (0, 1)$ lze postupovat obdobně. Více viz [2], příklad 2.2.14 a logaritmování nerovnic v kapitole o funkcích.

Závěr: limitou geometrické posloupnosti $\{q^n\}$ s kvocientem $q \in (0, 1)$ je $L = 0$.

3. Limitu $L \in \mathbb{R}$ posloupnosti $\{(1 + 1/n)^n\}$ nazýváme Eulerovým číslem. Pro určení jeho hodnoty vyčíslíme v tabulce několik členů obou posloupností.

n	1	2	3	4	5	6	7
$(1 + 1/n)^n$	2	2.25	2.370	2.441	2.448	2.522	2.546
$(1 + 1/n)^{n+1}$	4	3.375	3.160	3.052	2.986	2.942	2.910

Z tabulky to moc nevypadá, že by měly posloupnosti stejnou limitu.

Úkol. Vyčíslete členy posloupností pro velká n a vyslovte hypotézu o vztahu limit obou posloupností.

Později ukážeme (v článku TODO), že limity posloupností se rovnají. Odtud plynou odhady pro hodnotu Eulerova čísla e: $(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$.

Úkol. Vyčíslete členy posloupností pro dostatečně velká n a určete hodnotu Eulerova čísla na šest desetinných míst. Pro jaký řád čísla n toho dosáhnete?[1]

[1] Řádem myslíme stovky, tisíce, desetitisíce ...

4. Limitu posloupnosti zadanou rekurentními vztahy (5.4) spočítáme přímo z rekurentního vztahu

$$a_n = (a_{n-1} + 2/a_{n-1})/2. \tag{5.11}$$

Později (v článku 5.5) si řekneme věty o limitách posloupností a aritmetických operacích. Z nich bude plynout, že limita L posloupnosti splňující (5.11) splňuje rovnici získanou dosazením L do toho vztahu za a_n i a_{n-1}. Tedy rovnici $L = (L + 1/L)/2$. Po úpravě dostaneme rovnici $L^2 = 2$, jejímž kořenem je $L = \sqrt{2}$.

5. Obrázek v článku 5.1.5 napovídá, že se obsahy vepsaného a opsaného mnohoúhelníku s rostoucím počtem hran blíží k obsahu kruhu. Jako každé tvrzení by i toto chtělo řádný důkaz, ale my se zde spokojíme s názorem získaným obrázkem. Odtud pak plyne, že limitou obou posloupností je hodnota obsahu jednotkového kruhu, tedy Ludolfovo číslo, které značíme π.

5.3 Definice limity posloupnosti

V případě neklesající posloupnosti napíšeme $L' < L$ ve tvaru $L' = L - \varepsilon$ s kladným ε. Vztah (5.6) pak napíšeme ve tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n > L - \varepsilon)$$

Podobně v případě nerostoucí posloupnosti napíšeme vztah (5.8) ve tvaru

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n < L + \varepsilon)$$

Limitu posloupnosti $\{a_n\}$ budeme definovat jako číslo $L \in \mathbb{R}$ splňující oba vztahy, tedy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)) \tag{5.12}$$

V [2] je limita posloupnosti definována v 2.1.4 až 2.1.7.

V následujících článcích rozebereme podrobně, co výrok (5.12) znamená. Po jejich přečtení doporučujeme čtenáři přečíst ještě poznámky 2.1.8 z [2].

5.3.1 Okolí bodu

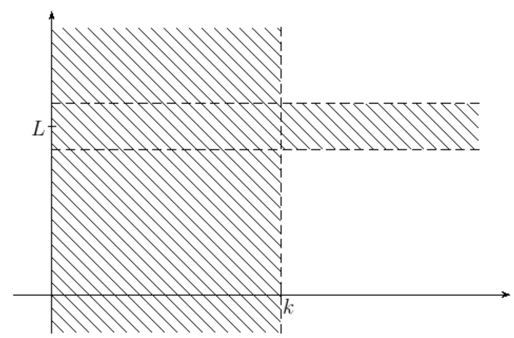
Interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ z (5.12) nazýváme okolím bodu $L \in \mathbb{R}$. Přitom bodem míníme bod na reálné ose, v tomto případě na ose y. Toto okolí budeme značit $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$. Obsahuje body osy, které mají od bodu L vzdálenost menší než ε. Pomocí absolutní hodnoty je možné napsat vztah $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ekvivalentně jako $|a_n - L| < \varepsilon$. [2]

V definici limity jsou významné malé hodnoty ε. V dalším vysvětlíme proč.

5.3.2 Poslední kvantifikátor

Na obrázku je na ose y vyznačen bod L a jeho okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$. Na ose x je vyznačen bod k. Vyšrafovaná část roviny obsahuje body $[x, y]$ splňující výrok

$$x \geq k \Rightarrow y \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$



Pouze v této části roviny mohou ležet body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ splňující [3]

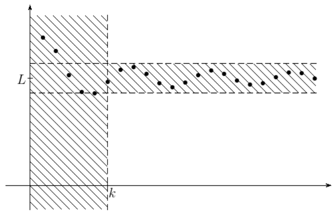
$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)) \tag{5.13}$$

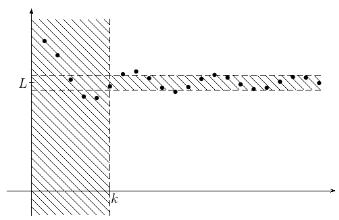
5.3.3 První dva kvantifikátory a závislost k na ε

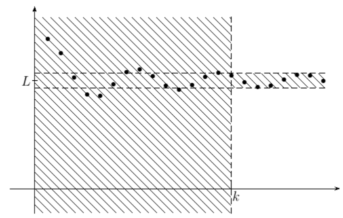
V definici limity je podstatné, že *pro každé* $\varepsilon > 0$ existuje k .... Na levém obrázku je k ε zvoleno k takové, že implikace (5.13) platí. Na prostředním obrázku je znázorněno, co se může stát, když zmenšíme ε. Vidíme, že implikace (5.13) přestala platit. Na pravém obrázku jsme ke zmenšenému ε zvolili k takové, že (5.13) platí.

[2] V dalším textu budeme podle potřeby používat obě vyjádření. Je tedy nutné, aby si čtenář udělal jasno o jejich vztahu.

[3] Vyšrafovali jsme i část odpovídající $x \notin \mathbb{N}$. To teď pro nás není důležité. Cílem je objasnit implikaci $n \geq k \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.







Úkol. Zvolte $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ a uvažujte posloupnost, která splňuje (5.13) a rozhodněte, zda odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje (5.13) pro

1. stejné L, k a větší ε,

   NÁVOD. Zvětšením ε se vyšrafovaná plocha zvětší. Pokud graf posloupnosti leží v původně vyšrafované části roviny, pak leží i ve zvětšené. Proto pro posloupnost výrok (5.13) se zvětšeným ε platí.

2. stejné L, ε a větší k,

3. stejné L, ε a menší k,

4. stejné L, větší k a větší ε,

5. stejné L, větší k a menší $\varepsilon > 0$,

6. stejné L, menší k a větší ε,

7. stejné L, menší k a menší $\varepsilon > 0$.

Z výsledku úkolu uděláme závěr, že jsou zajímavé malé hodnoty $\varepsilon > 0$. Máme-li totiž k pro určitou hodnotu ε, vyhovuje toto k i hodnotám větším.

5.3.4 Konstantní posloupnost a limita

Přečtěte si poznámku 2.1.13 v [2]. Je tam uvedeno, že konstantní posloupnost má limitu. Máme zatím tedy tři posloupnosti, jejichž limitu známe.

1. Limita převrácené hodnoty je nula. Formálně zapsáno $\lim \frac{1}{n} = 0$.

2. Limita geometrické posloupnosti s kvocientem $q \in (0, 1)$ je nula. Formálně zapsáno $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
   Zde jsme vyznačili, že index posloupnosti je n a že děláme limitu *pro n blížící se k nekonečnu.* V předchozím příkladě jsme toto vynechali, protože v něm není jiná proměnná kromě n a u posloupnosti nás zajímají limity pouze pro její index blížící se k nekonečnu.

3. Limita konstantní posloupnosti je rovna oné konstantě. Formálně zapsáno: pro $a \in \mathbb{R}$ je $\lim a = a$.

5.3.5 Konvergentní a konstantní posloupnost

Obsahem tohoto článku je filosofické zamyšlení nad pojmem limita posloupnosti. V jistém smyslu je každá konvergentní[4] posloupnost téměř konstantní.

Vysvětlíme, jak to myslíme:
V reálných úlohách nepracujeme s přesnými čísly, ale s jejich přibližnými hodnotami. Je to jednak kvůli vstupním datům, která jsou málokdy přesná a dále kvůli zaokrouhlování během výpočtů.[5] Okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ pro malé hodnoty ε představuje čísla, která se od L liší tak málo, že je s *„rozlišovací schopností“* danou číslem ε rozlišit nedokážeme a splývají nám.

Chce-li si čtenář udělat představu na konkrétních posloupnostech, doporučujeme mu podívat se na graf posloupnosti $\{c_n\}$ v článku 5.1.3, nebo na grafy a tabulky vypočtených hodnot v článcích 5.1.4, 5.1.5.

V tomto smyslu je konvergentní taková posloupnost, která je pro libovolně jemnou rozlišovací schopnost od určitého indexu k v rámci této rozlišovací schopnosti konstantní.

5.4 Jednoznačnost limity

Posloupnost nemůže mít více než jednu limitu. Odkazujeme čtenáře na lemma 2.1.9 a poznámku 2.1.10 v [2].

V předchozím článku jsme uvedli posloupnosti, které limitu mají, nyní tedy víme, že nemají žádnou další. Později uvedeme příklad posloupnosti, která nemá limitu žádnou.

[4] Z poznámky 2.1.8.3 v [2] pravděpodobně čtenář ví, že konvergentní posloupnost je taková posloupnost, která má limitu $L \in \mathbb{R}$. Později budeme zkoumat posloupnosti, které mají limitu jedno z nekonečen, $+\infty$, $-\infty$. Ty konvergentními nazývat nebudeme.

[5] Za třetí někdy zaneseme další chybu při záměrném zjednodušení úlohy, které je někdy nutné, abychom ji dokázali vyřešit a získali alespoň aproximaci řešení.

5.5 Limita posloupnosti a aritmetické operace

[2], věty 2.1.22, 2.1.30.

5.6 Kalkulus limit poprvé

Ukážeme použití věty o limitách a aritmetických operacích na výpočtu limity posloupnosti

$$\left\{\frac{3n^2+n-5}{n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Začneme úpravou – rozšíříme zlomek

$$\frac{3n^2+n-5}{n^2+2} = \frac{(3n^2+n-5)\frac{1}{n^2}}{(n^2+2)\frac{1}{n^2}} = \frac{3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

Víme, že $\frac{1}{n} \to 0$. Z věty o limitě součinu plyne $-\frac{5}{n^2} = -5\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \to -5\cdot 0\cdot 0 = 0$. Z věty o limitě součtu pak plyne $3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2} \to 3+0+0$. Podobně dostaneme $1+\frac{2}{n^2} \to 1$. V závěru použijeme větu o limitě podílu a dostaneme

$$\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \to \frac{3}{1} = 3$$

Další příklady.

1. Chceme vypočítat limitu posloupnosti

$$\left\{\frac{2^n+4^n}{2^{n+2}-4^{n+1}}\right\}$$

V příkladu s polynomy v čitateli a jmenovateli zlomku jsme vytýkali člen s nejvyšší mocninou, protože hodnota tohoto členu roste s rostoucím n nejrychleji. Ze stejného důvodu teď ze zlomku vytkneme 4^n a upravíme

$$\frac{(2^n+4^n)\frac{1}{4^n}}{(2^{n+2}-4^{n+1})\frac{1}{4^n}} = \frac{\frac{2^n}{4^n}+1}{\frac{2^{n+2}}{4^n}-\frac{4^{n+1}}{4^n}} = \frac{(\frac{2}{4})^n+1}{4(\frac{2}{4})^n-4} = \frac{(\frac{1}{2})^n+1}{4(\frac{1}{2})^n-4}$$

Protože je $1/2 \in (-1, 1)$, platí $(1/2)^n \to 0$, a tedy

$$\frac{(\frac{1}{2})^n + 1}{4(\frac{1}{2})^n - 4} \to -\frac{1}{4}$$

a proto i

$$\frac{2^n + 4^n}{2^{n+2} - 4^{n+1}} \to -\frac{1}{4}$$

2. Chceme vypočítat limitu posloupnosti

$$\left\{\frac{n^8}{1.2^n}\right\}$$

Vyčíslením členů dostaneme, že posloupnost roste až do indexu $n = 44$ a hodnoty $44^8/1.2^{44} \doteq 4.6 \times 10^9$. Pak začne klesat a klesá k nule. Ukázat, že má opravdu limitu rovnu nule přímým výpočtem není jednoduché. Pomůžeme si trikem – vypočteme podíl sousedních členů a jeho limitu

$$\frac{n^8}{1.2^n} : \frac{(n+1)^8}{1.2^{n+1}} = \frac{n^8 1.2^{n+1}}{(n+1)^8 1.2^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^8 1.2 \to 1.2$$

Vidíme, že pro velká n klesá posloupnost přibližně jako geometrická posloupnost s qvocientem $1/1.2$, která má limitu rovnu nule. Více podrobností v (zatím neexistující) kapitole o řadách, o podílovém kritériu konvergence řad a o nutné podmínce konvergence. Uvidíme, že výsledek lze zobecnit na

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall a \in (1, +\infty))(\lim_{n\to\infty} \tfrac{n^k}{a^n} = 0)$$

3. Vypočteme limitu posloupnosti

$$\left\{\frac{n^{12} + 1.1^n}{n^6 + 1.15^n}\right\}$$

Z předchozího příkladu víme, že členy s n v exponentu rostou rychleji než členy s n v základu mocniny. Zároveň víme, že rychleji roste mocnina z větším základem. Proto vytkneme z čitatele a jmenovatele 1.15^n. Po vytknutí a úpravě dostaneme

$$\frac{(n^{12} + 1.1^n)\frac{1}{1.15^n}}{(n^6 + 1.15^n)\frac{1}{1.15^n}} = \frac{\frac{n^{12}}{1.15^n} + (\frac{1.1}{1.15})^n}{\frac{n^6}{1.15^n} + 1} \to \frac{0+0}{0+1} = 0$$

5.7 Limita posloupnosti a absolutní hodnota

[2], věta 2.1.28.

5.8 Limita posloupnosti a existence odmocniny

[2], příklad 2.4.15, definice 2.4.16 odmocniny, poznámka 2.4.17 o jednoznačnosti odmocniny.

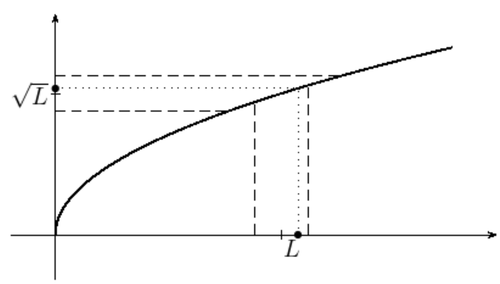
5.9 Limita posloupnosti a odmocnina

V článku 5.6 jsme spočítali limitu posloupnosti $\frac{3n^2+n-5}{n^2+2} \to 3$. Cílem tohoto článku bude ukázat, že $\sqrt{\frac{3n^2+n-5}{n^2+2}} \to \sqrt{3}$ a obecněji, že z $a_n \to L > 0$ plyne $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$.

5.9.1 Důkaz pro druhou odmocninu a kladnou limitu

Na obrázku je graf odmocniny, na ose x je vyznačen bod L se svým okolím a v tomto okolí je tečkou vyznačen člen a_n posloupnosti.

Na ose y je vyznačen bod $\sqrt{L}$ se svým okolím a v něm tečkou bod $\sqrt{a_n}$.



Okolí na ose x označíme $\mathcal{U}_\delta(L)$, [6] okolí na ose y označíme $\mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L})$. Rozmyslete si, že pro okolí nakreslená na obrázku platí

$$(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(L))(\sqrt{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L})) \tag{5.14}$$

V dalším ukážeme, že *pro každé* $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí (5.14).

[6]Je na našem rozhodnutí, zda použijeme ε, δ nebo úplně jiné písmeno. Nutné je jen použít na každé z nich jiný symbol. Zde jsme se rozhodli použít značení běžné v definici spojitosti funkce. Uvidíme později, že vztah (5.14) mezi okolími $\mathcal{U}_\delta(L)$, $\mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L})$ je použit v definici spojitosti.

Protože je $a_n \to L$, tak víme, že k δ existuje k splňující

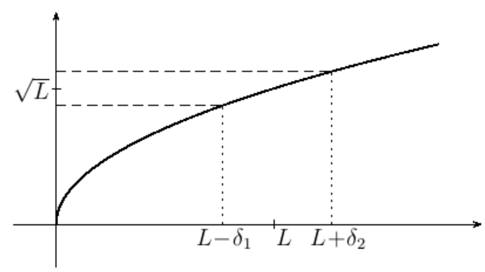
$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(a_n \in \mathcal{U}_\delta(L)) \tag{5.15}$$

Z (5.15) a (5.14) pak plyne

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(\sqrt{a_n} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L})) \tag{5.16}$$

Ukažme tedy existenci $\delta > 0$ splňujícího (5.14). Na následujícím obrázku to ukážeme k ε dostatečně malému, tak aby platilo $\sqrt{L} - \varepsilon > 0$, tedy k $\varepsilon < \sqrt{L}$.

Na obrázku je na ose y zakreslen bod $\sqrt{L}$ se svým okolím $\mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L})$. Ke krajním bodům tohoto okolí jsou pak na osu x přeneseny vzory



$$\begin{aligned} \sqrt{L-\delta_1} &= \sqrt{L} - \varepsilon \\ \sqrt{L+\delta_2} &= \sqrt{L} + \varepsilon \end{aligned}$$

pak pro $x \in (L - \delta_1, L + \delta_2)$ platí $\sqrt{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L})$

Výpočtem dostaneme

$$\delta_1 = 2\varepsilon\sqrt{L} - \varepsilon^2 \qquad \delta_2 = 2\varepsilon\sqrt{L} + \varepsilon^2$$

a za δ zvolíme menší z nich, tedy

$$\delta = \varepsilon(2\sqrt{L} - \varepsilon) \tag{5.17}$$

Z podmínky $\varepsilon < \sqrt{L}$ plyne $\delta > 0$.
Z $\delta \leq \delta_1$, $\delta \leq \delta_2$ plyne

$$\text{Je-li } a_n \in \mathcal{U}_\delta(L), \text{ pak je } a_n \in (L - \delta_1, L + \delta_2) \text{ a } \sqrt{a_n} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L}) \tag{5.18}$$

a odtud plyne $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$.

Úkol. Zakreslete na číselnou osu hodnoty L, $L - \delta_1$, $L + \delta_2$ a $L - \delta$, $L + \delta$.

Pro ε, které nesplňuje podmínku $\sqrt{L} - \varepsilon \geq 0$, tedy pro $\varepsilon \geq \sqrt{L}$ zvolíme δ stejné jako pro $\varepsilon = \sqrt{L}$, tedy $\delta = L$. Pak platí [7]

$$\begin{aligned} &\text{Je-li } a_n \in \mathcal{U}_L(L) = (0, 2L), \text{ pak je } \sqrt{a_n} \in (0, \sqrt{2L}) \\ &\text{a tedy i } \sqrt{a_n} \in (0, 2\sqrt{L}) \subseteq (\sqrt{L} - \varepsilon, \sqrt{L} + \varepsilon) = \mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L}) \end{aligned} \tag{5.19}$$

[7] Je to podobné jako u posloupností, kde jsme viděli, že jsou zajímavé malé hodnoty ε. I zde δ splňující (5.14) pro určité ε splňuje (5.14) i pro větší ε.

Úkol. Zakreslete na číselnou osu hodnoty $0, \sqrt{2L}$, $2\sqrt{L}$ a vyznačte, kde leží $\sqrt{L}-\varepsilon$, $\sqrt{L}+\varepsilon$ pro $\varepsilon > \sqrt{L}$.

Závěrem článku formulujeme větu, kterou jsme v něm dokázali.

Věta. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní a její limita, kterou označíme L je kladná. Pak je konvergentní i posloupnost $\{\sqrt{a_n}\}$ a má limitu $\sqrt{L}$.

5.9.2 Obecné tvrzení

Bez důkazu uvedeme obecnější větu. Budeme ji používat při výpočtech.

Věta o limitě posloupnosti a odmocnině. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n \to L \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. Pro liché $p \geq 3$ je $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{L}$.
2. Pro sudé $p \geq 2$ a $L > 0$ je $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{L}$.
3. Pro sudé $p \geq 2$ a $L = 0$ za předpokladu $(\exists k)(\forall n \geq k)(a_n \geq 0)$ platí $\sqrt[p]{a_n} \to 0)$.

5.10 Kalkulus limit podruhé

Příklad. Chceme vypočítat limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{n + \sqrt{2n^2 + 3n + 4}}{5n + 6}$$

Řešení. Rozšíříme zlomek, upravíme a použijeme větu o limitě posloupnosti a aritmetických operacích a větu o limitě a odmocnině.

$$\frac{(n + \sqrt{2n^2 + 3n + 4})\frac{1}{n}}{(5n+6)\frac{1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}}{5 + \frac{6}{n}} \to \frac{1 + \sqrt{2+0+0}}{5+0} = \frac{1+\sqrt{2}}{5}$$

Příklad. Vypočítáme limitu posloupnosti

$$\left\{n - \sqrt{n^2 - 3n}\right\}_{n=3}^{\infty}$$

Rozšíříme a upravíme

$$\begin{aligned} n-\sqrt{n^2-3n} &= \frac{(n-\sqrt{n^2-3n})(n+\sqrt{n^2-3n})}{n+\sqrt{n^2-3n}} \\ &\frac{n^2-(n^2-3n)}{n+\sqrt{n^2-3n}} = \frac{3n}{n+\sqrt{n^2-3n}} \end{aligned}$$

a znovu rozšíříme

$$\frac{3n}{n+\sqrt{n^2-3n}} = \frac{3n\frac{1}{n}}{(n+\sqrt{n^2-3n})\frac{1}{n}} = \frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}$$

Použitím vět o limitě součinu, součtu odmocnině a podílu dostaneme

$$\frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}} \to \frac{3}{2}$$

a tedy i

$$n-\sqrt{n^2-3n} \to \frac{3}{2}$$

5.11 Konvergentní a omezená posloupnost

Lemma 2.1.21 o omezenosti konvergentní posloupnosti.

Definice 2.4.3 vybrané posloupnosti.

Věta 2.4.4. o vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti.

Poznámka 2.4.5 o omezené posloupnosti, která není konvergentní.

5.12 Vybraná posloupnost a limita

Tvrzení 2.4.13 o konvergenci posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti.

Důsledek 2.4.14 o posloupnosti, ze které lze vybrat posloupnosti s různou limitou.

5.13 Nevlastní limity

Definice 2.3.4 aritmetických operací s nekonečny.

5.14 Limitní přechod v nerovnosti

Věta 2.3.2.

Lemma 2.4.10 o součinu omezené posloupnosti s posloupností s nulovou limitou.

5.15 Cauchyovské posloupnosti

Definice 2.4.6 Cauchyovské posloupnosti.

Lemma 2.4.7.

Věta 2.4.8.

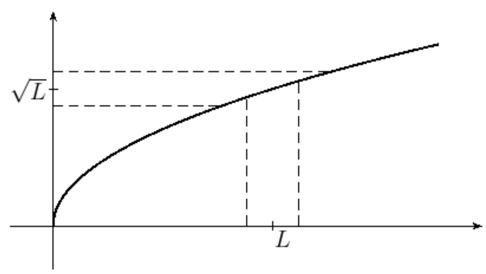
Kapitola 6

Spojité funkce

6.1 Definice spojitosti funkce v bodě

Připomeneme obrázek z článku 5.9 a vztah (5.14), který zde přepíšeme

$$(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(L))(\sqrt{x} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\sqrt{L}))$$



V 5.9 jsme ukázali, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující (5.14).

Tuto vlastnost nazýváme spojitostí odmocniny v bodě L, viz následující definici.

Definice spojitosti funkce v bodě. Řekneme, že je *funkce f spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))) \tag{6.1}$$

Přečtěte si poznámky 4.2.3, číslo 1, 2 v [2]. Podle nich nemůže být spojitá funkce v bodě, v němž není definovaná, například funkce $x \mapsto (x-1)/(x^2-1)$ v bodě $x = 1$. Dále podle nich nemůže být spojitá funkce v bodě, pokud není definovaná v nějakém jeho okolí, například funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ v bodě $x = 0$.

Pokud je funkce definovaná v *pravém okolí* bodu x_0, což je interval $(x_0, x_0+\delta)$ nebo v *levém okolí* bodu x_0, to je interval $(x_0 - \delta, x_0)$, může být *jednostranně spojitá*, viz následující definice.

Definice jednostranné spojitosti funkce v bodě. Řekneme, že je *funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))) \tag{6.2}$$

Řekneme, že je *funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zleva*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))) \tag{6.3}$$

Příklady.

1. Funkce $x \mapsto x$ je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

   Stačí v (6.1) zvolit $\delta = \varepsilon$. Dostaneme výrok $(\forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0))(x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$, který evidentně platí.

2. Konstantní funkce $x \mapsto a$ je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

   Lze volit libovolné δ, například $\delta = 1$, protože $a \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$ platí pro každé $\varepsilon > 0$.

3. Celá část je spojitá v celých číslech zprava.

   Stačí si uvědomit, že je v pravém okolí bodu $k \in \mathbb{Z}$ funkční hodnota rovna k.

4. Druhá odmocnina je spojitá v $x > 0$.

   Viz článek 5.9.

5. Druhá odmocnina je spojitá v nule zprava.

   δ k ε zkonstruujeme stejným způsobem jako jsme v článku 5.9 zkonstruovali δ_2.

Vlastnosti. Funkce je v bodě x spojitá právě když je v x spojitá zprava i zleva.

6.2 Spojitost a limita posloupnosti

Lemma 4.2.6.

Důsledek 4.2.7 a nemožnost spojitého rozšíření funkce $x \mapsto \sin(1/x)$ do bodu nula.

Příklad 4.2.8 o nespojitosti Dirichletovy funkce.

Příklad 4.2.9 (ne)spojitost Riemannovy funkce.

Heineho věta 4.2.11.

6.3 Spojitost a aritmetické operace

Budeme uvažovat dvě funkce f, g spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ukážeme, že jsou v bodě x_0 spojité i funkce

1. $x \mapsto f(x) + g(x)$, tuto funkci nazýváme součtem funkcí f, g a značíme $f + g$
2. rozdíl funkcí $f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$
3. součin funkcí $fg : x \mapsto f(x)g(x)$
4. za předpokladu $g(x_0) \neq 0$ i podíl $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$

Příklad. Víme, že identita $x \mapsto x$ je spojitá a víme, že polynomy získáme z identity aritmetickými operacemi. Odtup plyne, že polynomy jsou spojité funkce.

6.4 Spojitost a složená funkce

[2] věta 4.2.18.

6.5 Definice spojitosti na intervalu

Definice 4.2.19.

Definice 4.3.26.

Příklady.

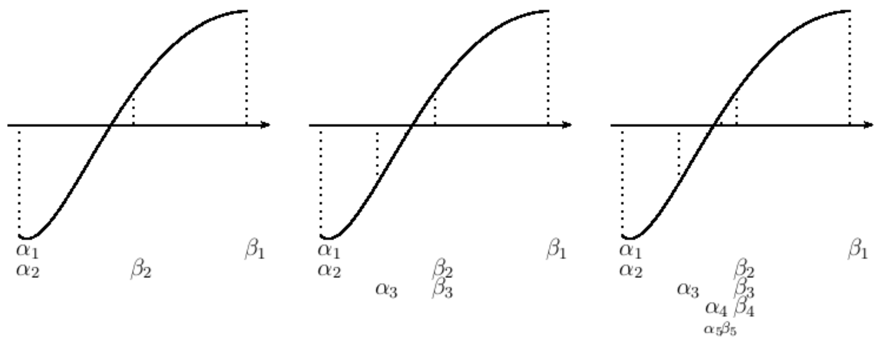
1. Funkce celá část je spojitá na intervalech $[k, k+1)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

6.6 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Weierstrassova věta o extrémech funkce spojité na uzavřeném intervalu, formulace je v [2] 4.3.31.
TODO: GRAFY FUNKCÍ NESPLŇUJÍCÍCH JEDEN Z PŘEDPOKLADŮ ANI ZÁVĚR VĚTY

Věta o kořeni spojité funkce (Bolzano 1817), formulace věty i důkaz je v [2] 4.3.32. Symbol $\mathcal{C}([a,b])$ je vysvětlen v poznámce 4.3.30. Vztah $f(a)f(b)$ říká, že funkční hodnoty $f(a)$, $f(b)$ jsou nenulové a mají opačná znaménka.

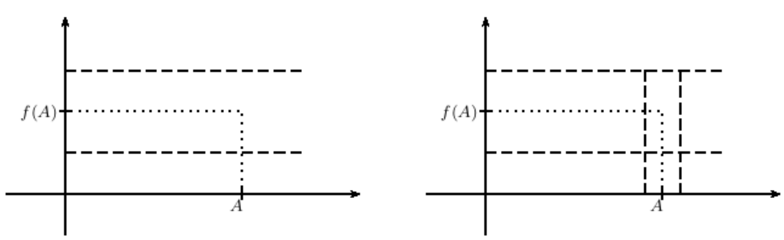
DŮKAZ přebíráme z [2], přečtěte si, jak jsou konstruovány intervaly $[\alpha_n, \beta_n]$. Na následujících obrázcích je tato konstrukce znázorněná.



Z konstrukce plyne, že posloupnost $\{\alpha_n\}$ je neklesající a posloupnost $\{\beta_n\}$ je nerostoucí. Dále jsou obě omezené (zdola číslem a, shora číslem b). Odtud plyne, že jsou obě konvergentní. Označíme $A = \lim \alpha_n$, $B = \lim \beta_n$.

Délka k-tého intervalu je polovina délky $k-1$-ího intervalu. Odtud plyne $\beta_k - \alpha_k = (b-a)/2^k$ a odtud a z věty o limitě rozdílu plyne $A = B$.

Ukážeme, že A je kořen funkce f, tedy, že $f(A) = 0$. Z věty o limitě posloupnosti a spojité funkci plyne $f(A) = \lim_{k\to\infty} f(\alpha_k)$. Zároveň pro $k \in \mathbb{N}$ platí $f(\alpha_k) < 0$. Odtud plyne, že $f(A) \le 0$, viz obrázek a text pod ním.



Na obrázcích je ukázáno, co by nastalo, kdyby platil opak, tedy $f(A) > 0$. Na obrázku vlevo jsme zvolili $\varepsilon = \frac{f(A)}{2}$ a k němu nakreslili do pravého obrázku $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (A-\delta, A+\delta)$ platí $f(x) \in (f(A) - \varepsilon, f(A)+\varepsilon)$. Protože je $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = A$, leží od určitého indexu počínaje prvky posloupnosti v intervalu $\alpha_k \in (A-\delta, A+\delta)$. Odtud plyne $f(\alpha_k) \in (f(A)-\varepsilon, f(A)+\varepsilon)$, tedy $f(\alpha_k) > 0$. To je spor s konstrukcí intervalů – z té plyne $f(\alpha_k) \le 0$. Proto platí $f(A) \le 0$.

Podobně ukážeme, že $f(B) \geq 0$.

Z $f(A) \leq 0$, $f(B) \geq 0$, $A = B$ pak plyne $f(A) = 0$. $\square$

Příklad. Použijeme větu na řešení nerovnice

$$\sqrt{3x-2} > 4 - 3x$$

Určíme definiční obor a vyřešíme rovnici. Tím dostaneme intervaly, na nichž nemá rovnice kořeny: $[-\frac{2}{3}, 1)$, $(1, +\infty)$. Z každého intervalu vezmeme jeden bod a zjistíme, zda vyhovuje nerovnici $x = -\frac{2}{3} : \sqrt{0} \not> 2$, $x = 2 : \sqrt{4} > -2$.

Vysvětlíme, že z tohoto výpočtu a z věty o kořeni spojité funkce plyne, že řešením nerovnice je interval $(1, +\infty)$.

Rovnici upravíme do tvaru $\sqrt{3x-2} - 4 + 3x > 0$. O funkci $f(x) = \sqrt{3x-2} - 4 + 3x$ víme, že je spojitá na intervalu $[-2/3, +\infty)$. Dále víme, že $f(-2/3) < 0$ a že na intervalu $I_1 = [-2/3, 1)$ nemá funkce f žádný kořen. Odtud plyne, že pro $x \in I_1$ platí $f(x) < 0$ – jinak by měla f podle věty o kořeni spojité funkce na I_1 kořen. Podobně z $f(2) > 0$ usoudíme, že pro $x \in (1, +\infty)$ platí $f(x) > 0$.

Odtud plyne, že řešením nerovnice je interval $(1, +\infty)$.

Věta 4.3.34 o obrazu uzavřeného intervalu ve spojité funkci.

Věta 4.3.36 o Darbouxově vlastnosti spojité funkce.

Věta 4.3.37 o obrazu intervalu ve spojité funkci.

6.7 Inverzní funkce ke spojité monotonní funkci

6.7.1 Odmocniny

6.8 Vzor a obraz intervalu ve spojité funkci

Kapitola 7

Limita funkce

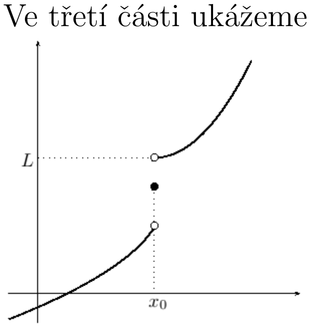
7.1 Limita monotonní funkce

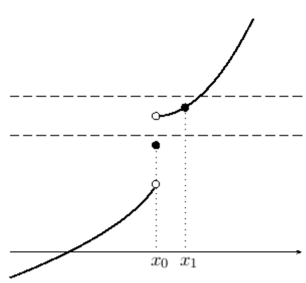
Ukážeme, že monotonní funkce má jednostranné limity. Důkaz tohoto tvrzení je přímočarý a jednoduchý pro toho, kdo rozumí definicím limity, suprema a infima. Pro ostatní je důkaz příležitostí si tyto definice zopakovat a více jim porozumět.

Lemma o jednostranných limitách neklesající funkce. Nechť je funkce f neklesající na intervalu (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Pak má funkce f v bodě x_0 vlastní jednostranné limity a platí

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Důkaz rozdělíme na tři části. V první ukážeme existenci limity zprava. Existence limity zleva se ukáže analogicky, proto řekneme jen hlavní myšlenku. Ve třetí části ukážeme nerovnost mezi jednostrannými limitami.





Na levém obrázku je graf neklesající funkce f v okolí bodu x_0. Na ose y je vyznačeno infimum funkčních hodnot z pravého okolí bodu x_0

$$L = \inf\{f(x) : x > x_0\}$$

Na pravém obrázku je navíc okolí $\mathcal{U}(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ (a bod x_1 – o něm více dále).

Chceme ukázat, že platí $L = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. K tomu je potřeba ukázat existenci pravého okolí bodu x_0: $(x_0, x_0+\delta)$ takového, že pro $x \in (x_0, x_0+\delta)$ platí $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Na pravém obrázku je v okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ bodu L vyznačena funkční hodnota bodu $x_1 > x_0$ splňující $f(x_1) < L+\varepsilon$. Existence takového x_1 plyne z toho, že infimum L je největší dolní závora, proto $L+\varepsilon > L$ není dolní závora – tedy musí existovat $x_1 > x_0$ splňující $f(x_1) < L+\varepsilon$.

Ukažme, že interval $x \in (x_0, x_1)$ je hledaným pravým okolím bodu x_0 (tedy $\delta = x_1 - x_0$). K tomu je potřeba ukázat, že pro $x \in (x_0, x_1)$ platí $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$:
Z $x > x_0$ plyne $f(x) \geq L$ (L je dolní závora těchto funkčních hodnot). Odtud plyne $f(x) > L-\varepsilon$.
Z $x < x_1$ plyne pro neklesající funkci f platnost $f(x) \leq f(x_1)$ a odtud $f(x) < L+\varepsilon$.

Tím jsme ukázali, že L je rovno limitě funkce f v bodě x_0 zprava.

Podobně se ukáže, že $M = \sup\{f(x) : x < x_0\}$ je limitou funkce f v bodě x_0 zleva.

Zbývá ukázat, že $M \leq L$. Zvolme $x_+ > x_0$. Z monotonie plyne, že $f(x_+)$ je horní závora množiny $\{f(x) : x < x_0\}$, proto platí $f(x_+) \geq M$, protože M je nejmenší horní závora téže množiny. Odtud plune, že M je dolní závora množiny $\{f(x) : x > x_0\}$, a proto je $M \leq L$, protože L je největší dolní závora téže množiny. □

Přechodem k funkci $-f$ (minus f) dokážeme následující „duální“ lemma.

Lemma o jednostranných limitách nerostoucí funkce. Nechť je funkce f nerostoucí na intervalu (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Pak má funkce f v bodě x_0 vlastní jednostranné limity a platí

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \geq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Důkaz. Je-li f nerostoucí na (a,b) je $-f$ neklesající na (a,b). Z lemmatu o jednostranných limitách neklesající funkce dostaneme existenci jednostranných limit a vztah

$$\lim_{x\to x_0^-} (-f(x)) \leq \lim_{x\to x_0^+} (-f(x)).$$

Odtud vynásobením minus jedničkou dostaneme

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \geq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

□

7.2 Limita složené funkce

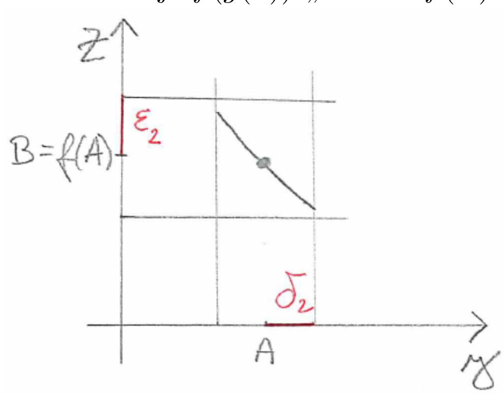
V tomto článku vysvětlíme větu 4.4.1 o limitě složené funkce z [2] a naučíme se ji používat. Věta zahrnuje dva případy a v obou nejdříve vypočteme limitu vnitřní funkce. Následující příklad ilustruje případ (1) uvedené věty.

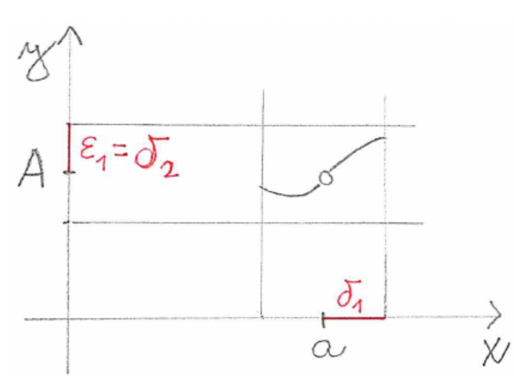
Příklad. Chceme spočítat limitu funkce $f : x \mapsto \sqrt{\frac{4-x^2}{x+2}}$ pro $x \to -2$.

Řešení. Vypočteme nejdříve limitu vnitřní funkce $\frac{4-x^2}{x+2} = 2 - x \to 4$ a dosadíme ji do vnější funkce. Dostaneme výsledek $\sqrt{4} = 2$.

Komentář. V příkladu jsme použili spojitost vnější funkce.

Důkaz věty je přímočarý a jednoduchý pro čtenáře zručného v práci s okolími. Neformálně jej můžeme převyprávět: vnitřní funkce g má v bodě a limitu A, což znamená, že pro x „blízké“ a, ale různé od a je $g(x)$ „blízké“ A. Funkce f je spojitá v bodě A, což znamená, že pro y „blízké“ A je $f(y)$ „blízké“ $f(A)$, a to je rovno limitě B. Odtud plyne, že pro x „blízké“ a, ale různé od a je $f(g(x))$ „blízké“ $f(A) = B$.





Bod (1) věty 4.4.1 pro posloupnosti je jednou z implikací věty 4.2.11 a verzi pro funkce dostaneme za použití věty 4.3.7 – tím máme druhý způsob důkazu.

Následující příklad ilustruje bod (2) věty 4.4.1.

Příklad. Chceme spočítat limitu funkce $f : x \mapsto 2^{-1/x^2}$ pro $x \to 0$.

Řešení. Vypočteme nejdříve limitu vnitřní funkce $-1/x^2 \to -\infty$ a poté limitu vnější funkce: $2^y \to 0$ pro $y \to -\infty$.

Komentář. V tomto případě je podmínka z věty 4.4.1 splněna – vnitřní funkce nenabývá hodnoty $-\infty$.

Důkaz převyprávíme neformálně: vnitřní funkce g má v bodě a limitu A, což znamená, že pro x „blízké“ a, ale různé od a je $g(x)$ „blízké“ A. Zároveň z předpokladů věty víme, že pro taková x je $g(x)$ různé od A. Funkce f má v bodě A limitu B, což znamená, že pro y „blízké“ A, ale různé od A je $f(y)$ „blízké“ B. Odtud plyne, že pro x „blízké“ a, ale různé od a je $f(g(x))$ „blízké“ B.

7.2.1 Substituce v limitě

Bod (2) věty 4.4.1 můžeme často interpretovat jako substituci v limitě. Vysvětlíme to na příkladu.

Příklad. Chceme spočítat limitu funkce $f : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{x}$.

Řešení. Víme, že limita $\frac{\sin y}{y}$ je pro $y \to 0$ rovna jedné, proto upravíme $\frac{\sin(3x)}{x} = 3\,\frac{\sin(3x)}{3x}$ a limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$ převedeme na limitu $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$. Hodnota zadané limity je tedy rovna třem.

Komentář. Pro $x \to 0$ je $y = 3x \to 0$, proto počítáme i druhou limitu v nule. Pro $x \neq 0$ je $3x \neq 0$, proto můžeme použít (2) věty 4.4.1.

Poznámka. Podmínka pro vnitřní funkci – nemá nabývat limitní hodnoty v nějakém prstencovém okolí limitního bodu – je splněna v případě funkcí, které jsou na nějakém levém i pravém okolí ryze monotonní (tedy buď rostoucí nebo klesající).

Příklady, kdy toto není splněno a chybné použití věty vede ke špatnému výsledku jsou limita $\operatorname{sgn}(x\sin(1/x))$ pro $x \to 0$ nebo příklad 4.4.2. z [2]: limita $1 - |\operatorname{sgn}(|\operatorname{sgn} x| - 1)|$ pro $x \to 0$.

Úkoly. Vysvětlete, proč nemá funkce $x \mapsto \operatorname{sgn}(x\sin(1/x))$ v bodě nula limitu. Určete, čemu je rovna limita $1 - |\operatorname{sgn}(|\operatorname{sgn} x| - 1)|$ pro $x \to 0$.

7.2.2 Substituce v jednostranných limitách

Většina funkcí, se kterými se setkáte, je na dostatečně malých jednostranných okolích monotonní. Výjimkou je výše uvedený příklad funkce $x \mapsto x\sin(1/x)$ v okolí nuly. Podmínka (2) z věty 4.4.1 je splněna v případě rostoucích a klesajících funkcí.

V případě jednostranných limit použijeme druh monotonie (tedy zda je funkce rostoucí nebo klesající) k určení druhu limity (tedy zda zleva nebo zprava) po substituci. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Příklad. Chceme spočítat limitu funkce $x \mapsto \operatorname{cotg}(2^{1/x})$ pro $x \to 0^-$.

Řešení. Vnitřní funkce $x \mapsto 1/x$ má pro $x \to 0^-$ limitu rovnu $-\infty$. Funkce $y \mapsto 2^y$ má pro $y \to -\infty$ limitu rovnu nule a v okolí $-\infty$ nabývá hodnot větších než nula – proto budeme v dalším kroku počítat limitu v nule zprava. Funkce $z \mapsto \operatorname{cotg} z$ má pro $z \to 0^+$ limitu $+\infty$ – a to je zároveň hledaná limita.

Kapitola 8

Derivace funkce

Pro studium derivace funkce odkážeme čtenáře na [2]. Budeme stručně komentovat, co čtenáři doporučujeme v [2] přečíst. Některé partie zde vyložíme zjednodušeně. A především budeme vykládanou látku ilustrovat na obrázcích.

Následující odstavec je z kapitoly o limitách, strana 116.

Limitní přechod se vyskytuje i v reálných situacích: např. projede-li auto dráhu 1 km za 1 minutu, pak jelo *průměrnou* rychlostí 60 km/hod. Zkracujeme-li měřený úsek, vypočtené hodnoty se blíží údaji na tachometru, tj. jakési *okamžité* rychlosti. Zde se vyskytuje limitní proces, který je součástí definice okamžité rychlosti. Matematizace tohoto procesu byla velmi obtížná a trvala dlouhou dobu. Během ní se pracovalo s limitami posloupností i funkcí pouze intuitivně.

V článku 5.1 na str. 133 – 137 naleznete pokračování této motivace, definici derivace, vztah derivace a spojitosti a několik příkladů. Věta 5.1.10 o spojitosti funkce v bodě, ve kterém má konečnou derivaci je důležitá, ale považujeme její formulaci i důkaz za dostatečně jednoduchý, abychom čtenáře odkázali na její znění v [2].

K další motivaci pojmu derivace doporučujeme čtenáři shlédnout výklad okamžité rychlosti na webu Khanovy akademie
`https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-1/v/newton-leibniz-and-usain-bolt`,
nebo si klikněte na odkaz na webu předmětu na
`https://kap.fp.tul.cz/~simunkova/`.

V článku 5.2 až k větě 5.2.5 jsou odvozena pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu, je uvedena souvislost mezi existencí jednostranných derivací a spojitostí funkce, odvozena derivace konstantní funkce. Také na tuto důležitou část odkážeme čtenáře a nebudeme se jí věnovat.

Věta 5.2.6 a poznámka 5.2.7 jsou uvedeny pro elegantní a korektní důkaz věty 5.2.8 o derivaci složené funkce. Zjednodušenou (a méně korektní) verzi tohoto důkazu uvedeme v článku 8.7.1.

Příklad 5.2.10 a poznámka 5.2.11 jsou důležité pro pochopení složitějších pojmů jako aproximace funkce a derivace funkce více proměnných, proto se jimi budeme poměrně podrobně zabývat v článcích 8.5.3, 8.5.4. Uvedeme zde několik obrázků k ilustraci probíraných pojmů.

V 5.2.12 je uvedena definice tečny. Je v ní několik chyb – nutno podotknout, že jsou výjimkou – text je jinak téměř bezchybný. V úvodním vztahu má být na levé straně $g(y)$ – tedy proměnná y místo proměnné x. Ještě víc zmatečná je rovnice přímky na následujícím řádku – možná náprava je nahrazení x za x_0, a y na pravé straně za x. My se budeme více věnovat rovnici tečny v článku 8.5.

Lemma 5.2.13 je důležité pro tvrzení o derivaci a průběhu funkce. My ho uvádíme se stejným důkazem podrobně rozebraným a opatřeným obrázkem v článku 8.3.

K větám o střední hodnotě 5.2.16, 5.2.18 uvádíme v článku 8.4 obrázky. Větě 5.2.14 o Darbouxově vlastnosti derivace se v tomto textu nebudeme věnovat (zatím, možná časem přidáme článek s obrázkem).

Větu 5.2.22 o derivaci a monotonii a její důsledek 5.2.23 uvádíme v článku 8.6. Tvrzení jsme proti textu [2] poněkud zobecnili.

Funkcí rostoucí v bodě (definice 5.2.25, věta 5.2.26, důsledek 5.2.27) se v tomto textu zabývat nebudeme.

L'Hospitalovu pravidlu (věta 5.2.28) věnujeme samostatnou kapitolu.

8.1 Definice derivace, příklady

Definice. Je-li funkce f definována v okolí bodu a a existuje-li limita

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{8.1}$$

říkáme, že má funkce f v bodě a derivaci a limitu (8.1) nazýváme *derivací funkce f v bodě a* a značíme $f'(a)$.

Je-li limita (8.1) vlastní/nevlastní, mluvíme o *vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě a.*

Jednostranné limity nazýváme *jednostrannými derivacemi funkce f v bodě a zprava (zleva)* a značíme je $f'_-(a)$, $f'_+(a)$

$$\begin{aligned} f'_-(a) &= \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'_+(a) &= \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

V následujících příkladech si ukážeme, jak počítat derivaci přímo z její definice. V článku (8.2) pak odvodíme vzorce pro počítání derivací.

Příklady.

1. $f : x \mapsto x^2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

2. $f : x \mapsto \sqrt{x}$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

3. $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$ – připomeneme, že pro $x > 0$ je $\operatorname{sgn} x = 1$, pro $x < 0$ je $\operatorname{sgn} x = -1$ a $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Na pravém okolí nuly budeme tedy dosazovat $\operatorname{sgn} x = 1$, na levém $\operatorname{sgn} x = -1$. Proto budeme počítat v bodě $x = 0$ jednostranné derivace.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty \end{aligned}$$

Funkce sgn má tedy v bodě 0 jednostranné derivace, a protože se rovnají, má i (oboustrannou) derivaci. Tyto derivace jsou nevlastní (nekonečné).

4. $f : x \mapsto |x^2-1|$
spočítáme derivaci v bodě $a = 0$: v okolí tohoto bodu je $f(x) = 1 - x^2$, a tedy

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-1}{x-0} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

$a = 1$: v pravém okolí bodu 1 je $f(x) = x^2 - 1$, a tedy

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 2$$

v levém okolí bodu 1 je $f(x) = 1 - x^2$, a tedy

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 0}(-x-1) = -2$$

Protože se jednostranné derivace v bodě $x = 1$ nerovnají, nemá funkce f v bodě 1 oboustrannou derivaci.

5. $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$$

Poznámky.

1. V definici derivace jsme předpokládali, že je funkce definovaná v okolí bodu a. V bodě a je definování potřeba, protože se funkční hodnota $f(a)$ v definici vyskytuje a v okolí (libovolně malém) je definování potřeba, aby byla definována limita.

2. Vztah (8.1) někdy píšeme ve tvaru

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h} \tag{8.2}$$

Podobně pro jednostranné derivace

$$\begin{aligned} f'_-(a) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'_+(a) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

a derivaci zleva případně

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Výše jsme definovali derivaci v bodě, což je číslo. Funkci, která bodu a přiřadí toto číslo nazýváme derivací funkce. Dříve, než vyslovíme definici, uavedeme několik přikladů.

Příklady.

1. $f : x \mapsto x^2$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$$

Závěr: $f' : x \to 2x, x \in \mathbb{R}$.

2. $f : x \to |x|$
$a > 0$: v okolí a je $f(x) = x$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a + h - a}{h} = 1$$

$a < 0$: v okolí a je $f(x) = -x$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{-(a+h) - (-a)}{h} = -1$$

$a = 0$: v pravém okolí bodu 0 je $f(x) = x$, proto je $f'_+(0) = 1$ (výpočet je stejný jako pro $a > 0$)
v levém okolí je $f(x) = -x$, proto je $f'_-(0) = -1$
Závěr: $f'(x) = 1$ pro $x > 0$, $f'(x) = -1$ pro $x < 0$, v bodě $x = 0$ není f' definováno.

3. $f : x \mapsto \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$
pro $x > 0$ počítáme limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^3} - \sqrt{x^3}}{h}$$

zlomek rozšíříme součtem odmocnin

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h(\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3})}$$

upravíme čitatele a pokrátíme h

$$\lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 3xh + h^2}{\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}}$$

Výraz je spojitou funkcí proměnné h, proto spočítáme limitu dosazením. Vyjde $3x^2/2\sqrt{x^3} = 3\sqrt{x}/2$.
Pro $x = 0$ počítáme derivaci zprava buď stejnými úpravami jako nahoře nebo jednodušeji

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0$$

ZÁVĚR: funkce f má pro $x > 0$ derivaci $f'(x) = 3\sqrt{x}/2$, pro $x = 0$ má derivaci zprava rovnu nule. Můžeme ji tedy vyjádřit stejným vztahem jako pro $x > 0$.

V prvním příkladě je přirozené za derivaci funkce $f : x \mapsto x^2$ považovat funkci $f' : x \mapsto 2x$. Definiční obory funkce f a její derivace f' jsou oba $\mathbb{R}$.

V druhém příkladě má derivace funkce $f : x \mapsto |x|$ derivaci $f' : x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$. Definiční obory funkce a její derivace se tedy liší. Zatímco f je definovaná na $\mathbb{R}$, derivace f' jen na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ve třetím příkladě $f : x \mapsto \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$ je derivace $f' : x \mapsto 3\sqrt{x}/2$ s definičním oborem buď $(0, +\infty)$ nebo $[0, +\infty)$. Záleží na nás, pro jakou definici se rozhodneme. V [2] je v definici 5.1.13 zvolen druhý případ. Definiční obor derivace f' tvoří ty body, ve kterých má f oboustrannou vlastní derivaci a ty body, v nichž má jednu vlastní jednostrannou derivaci a druhá jednostranná derivace je buď nevlastní nebo neexistuje.

8.2 Kalkulus derivací poprvé

V článku odvodíme vzorce pro derivaci funkcí

$$x \mapsto x^n \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

Všechny tyto funkce lze zapsat jako mocninné funkce s racionálním exponentem $x \mapsto x^q$ a jejich derivace vyjde ve všech případech $(x^q)' = qx^{q-1}$.

8.2.1 Derivace mocnin a odmocnin

V článku používáme úpravy výrazů probrané v článku 15.4.

1. Konstantní funkce $f : x \mapsto C$, $x \in \mathbb{R}$.
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C-C}{h} = 0$
   ZÁVĚR: derivace konstantní funkce je nula.

2. $f : x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$
   ZÁVĚR: $(x)' = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
   Rada: pokud máte problém pochopit následující úpravy, dosaďte za n malé celé číslo, například 2, 3, ...
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + n(n-1)x^{n-2}h^2/2 + \cdots + h^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h/2 + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$
   ZÁVĚR: pro $n \in \mathbb{N}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$ s definičním oborem $x \in \mathbb{R}$.
   POZNÁMKA: pro $n = 0$ a $x \neq 0$ je $f(x) = 1$ a $f'(x) = 0x^{-1} = 0$ ve shodě s výše uvedeným výsledkem. Pro $n = 1$ je $f(x) = x$ a pro $x \neq 0$ je $f'(x) = x^0 = 0$, opět ve shodě s výše uvedeným výsledkem.

4. $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, obor pro x záleží na n – pro liché n je $x \in \mathbb{R}$, pro sudé n je $x \geq 0$
   Rada: pokud máte problém pochopit následující úpravy, dosaďte za n malé celé číslo, například 2, 3, ...
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{(n-1)/n} + (x+h)^{(n-2)/n}x^{1/n} + (x+h)^{(n-3)/n}x^{2/n} + \cdots + x^{(n-1)/n}} = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}$
   ZÁVĚR: pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}$ s definičním oborem závislým na hodnotě n – pro $x = 0$ je derivace nevlastní (a pro n sudé jednostranná), pro $x \neq 0$ je derivace definovaná, pokud je definovaná odmocnina.

POZNÁMKA: formálně je vzorec pro derivaci stejný

$$(x^q)' = qx^{q-1} \quad \text{pro } q \in \mathbb{N}, 1/q \in \mathbb{N} \tag{8.3}$$

8.2.2 Derivace a aritmetické operace

Věty o derivaci a aritmetických operacích najde čtenář v [2] pod čísly 5.2.1, 5.2.4, 5.2.5.

8.2.3 Derivace mocnin ze záporným exponentem

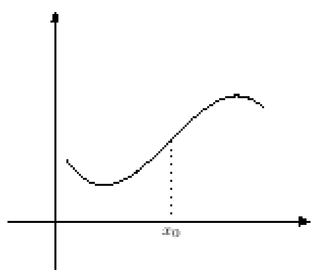
Použijeme pravidlo pro derivaci podílu pro odvození vzorců $(x^{-n})'$, $(x^{-1/n})'$

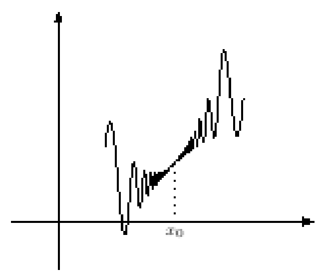
1. $f : x \mapsto 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $(\frac{1}{x^n})' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$
2. $f : x \mapsto 1/\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, definiční obor závisí na hodnotě n – pro sudé n je $x > 0$, pro liché n je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   $(\frac{1}{\sqrt[n]{x}})' = \frac{-x^{-1+1/n}/n}{x^{2/n}} = -\frac{1}{n}x^{-1-1/n}$

Poznámka: vzorec (8.3) tedy platí i pro záporné hodnoty $q \in \mathbb{Z}, 1/q \in \mathbb{Z}$.

8.3 Derivace a extrémy funkce

Pro zjišťování průběhu funkce má zásadní význam znaménko derivace. Na obrázcích jsou grafy funkcí, které mají v bodě x_0 kladnou derivaci. Na levém obrázku je funkce v okolí bodu x_0 rostoucí. Na obrázku vpravo rostoucí není v žádném okolí bodu x_0. Jen je v pravém okolí větší než $f(x_0)$ a v dostatečně malém levém okolí menší než $f(x_0)$. V tomto článku dokážeme, že tuto vlastnost má funkce v každém bodě, ve kterém má kladnou derivaci.





Pro bod se zápornou derivací ukážeme obdobné tvrzení s opačnými nerovnostmi. Odtud pak plyne, že v bodě, ve kterém má funkce lokální extrém nemůže mít ani kladnou ani zápornou derivaci. Tedy buď derivaci nemá nebo ji má nulovou. Tuto vlastnost zformulujeme v závěrečné větě článku.

Lemma o znaménku derivace a chování funkce v okolí bodu. Nechť má funkce f v bodě x_0 kladnou derivaci $f'(x_0) > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) < f(x_0))$$
$$(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) > f(x_0))$$

Důkaz. Na levém obrázku je graf funkce f s bodem x_0, pro nějž platí $f'(x_0) > 0$.

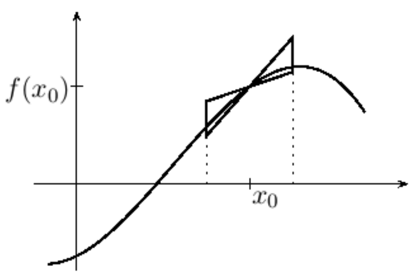
Na pravém obrázku je graf funkce g, která přírůstku h přiřadí směrnici sečny $g(h)$ s vyznačenou limitou v nule, která je rovna $f'(x_0)$.

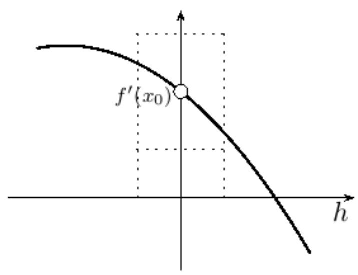
$$g : h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dále je na pravém obrázku vyznačeno okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ ležící v intervalu $(0, +\infty)$ a jemu odpovídající okolí $\mathcal{U}_\delta(0)$ splňující

$$h \in \mathcal{U}_\delta(0) \Rightarrow g(h) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0)). \tag{8.4}$$

Krajní hodnoty okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ se na obrázku vlevo zobrazí na přímky o rovnicích $y = (f'(x_0) \pm \varepsilon)(x - x_0) + f(x_0)$. Graf funkce f na okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ leží mezi těmito přímkami a odtud plyne tvrzení lemmatu.



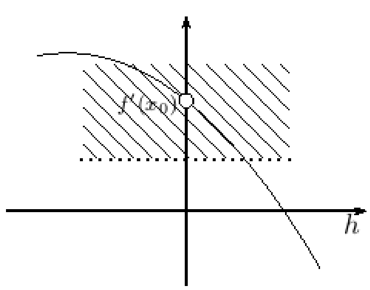


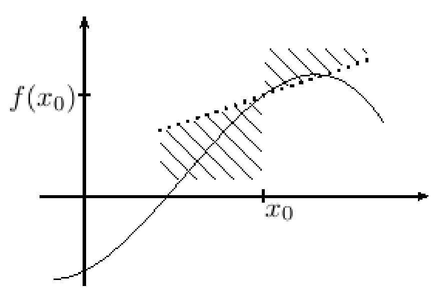
□

Poznámka. Vztah $g(h) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ z (8.4) obsahuje dvě nerovnosti. V důkazu stačí uvažovat jen jednu z nich

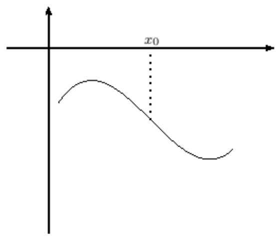
$$g(h) = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} > f'(x_0) - \varepsilon$$

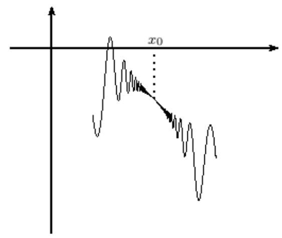
znázorněnou na obrázku vlevo. Úpravou nerovnosti (vynásobením h) dostaneme pro $h > 0$: $g(x_0 + h) - g(x_0) > h(f'(x_0) - \varepsilon)$ a pro $h < 0$ opačnou nerovnost. Obojí je znázorněno na obrázku vpravo.





Přechodem k funkci $-f$ dostaneme „duální“ lemma.





Lemma. Nechť má funkce f v bodě x_0 zápornou derivaci $f'(x_0) < 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) > f(x_0))$$
$$(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) < f(x_0))$$

Důkaz. Použijeme předchozí lemma na funkci $-f$. Platí $-f'(x_0) > 0$, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(-f(x) < -f(x_0))$$
$$(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(-f(x) > -f(x_0))$$

Požadované tvrzení dostaneme vynásobením nerovností minus jedničkou. □

Přímým důsledkem lemmatu je věta o derivaci a lokalních extrémech. Uvedeme jejich definici.

Definice lokálních extrémů. Řekneme, že má funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *lokální minimum*, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) > f(x_0)).$$

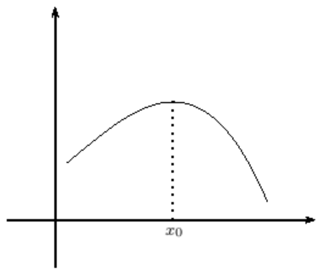
Řekneme, že má f v x_0 *lokální maximum* pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

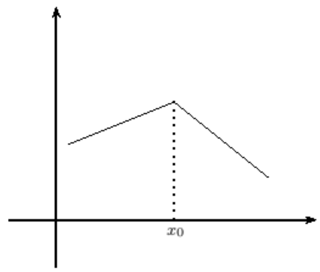
$$(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) < f(x_0)).$$

Má-li f v bodě x_0 lokální maximum nebo lokální minimum, říkáme, že má v bodě x_0 *lokální extrém*.

Věta o derivaci a extrémech. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a lokální extrém, pak je $f'(x_0) = 0$.

Důkaz. Věta je přímým důsledkem lemmat o znaménku derivace a chování funkce v okolí bodu.

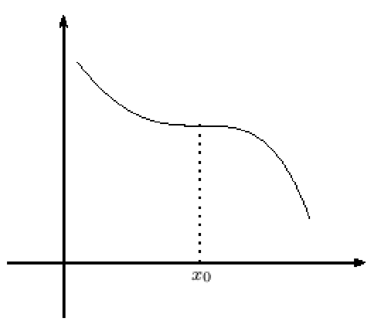


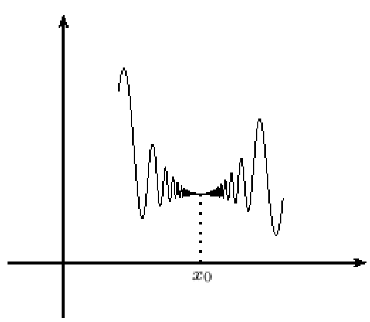


Na obrázcích má funkce v bodě x_0 lokální maximum. V bodě x_0, ve kterém nabývá funkce lokálního maxima, nemůže mít ani kladnou ani zápornou derivaci. Kdyby bylo $f'(x_0) > 0$, tak by na pravém okolí muselo být $f(x) > f(x_0)$, tedy by v x_0 neměla f lokální maximum. Podobně, kdyby bylo $f'(x_0) < 0$, tak by na levém okolí muselo být $f(x) > f(x_0)$, a opět by v x_0 neměla f lokální maximum. Jsou tedy další dvě možnosti, buď je $f'(x_0) = 0$ jako na obrázku vlevo, nebo $f'(x_0)$ neexistuje, jako na obrázku vpravo. My jsme předpokládali existenci derivace v bodě x_0, proto platí $f'(x_0) = 0$.

Podobné je to v případě, že má f v bodě x_0 lokální minimum. $\square$

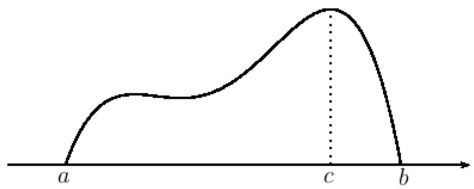
Následující obrázky ukazují, že v bodě s nulovou derivací funkce nemusí mít lokální extrém.





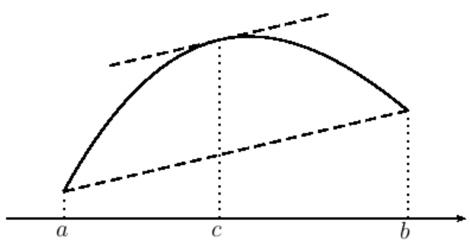
8.4 Rolleova a Lagrangeova věta

Znění a důkaz vět je v [2], 5.2.16, 5.2.18.



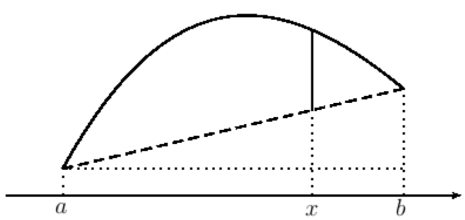
Na obrázku vlevo ilustrujeme Rolleovu větu. Funkce je na intervalu $[a, b]$ spojitá, v bodech a, b má stejnou funkční hodnotu a na intervalu (a, b) má derivaci.

Věta pak říká, že existuje $c \in (a, b)$, v němž má funkce nulovou derivaci. Důkaz věty říká, že to je v bodě, ve kterém funkce nabývá extrémní hodnoty, na našem obrázku maxima. Je třeba si rozmyslet, jak to bude obecně. Podrobnosti viz důkaz v [2].



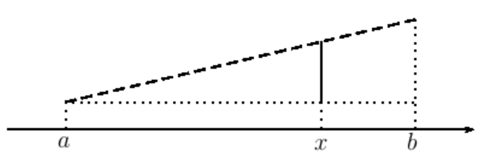
Na dalším obrázku ilustrujeme Lagrangeovu větu. Předpoklady jsou stejné jako u Rolleovy věty kromě stejných funkčních hodnot v krajních bodech intervalu.

Věta říká, že existuje bod $c \in (a, b)$, v němž má funkce derivaci rovnu směrnici sečny: $(f(b) - f(a))/(b - a)$.



Důkaz používá pomocnou funkci F, jejíž funkční hodnota je rovna rozdílu znázorněnému plnou úsečkou. Je to rozdíl funkční hodnoty a y-ové souřadnice bodu na sečně.

Další obrázek ukazuje, jak tuto y-ovou souřadnici na sečně vypočteme. Je rovna součtu délek svislých úseček – tečkované a plné.



Tečkovaná je rovna $f(a)$. Plnou spočítáme z podobnosti trojúhelníků. Dostaneme

$$y = f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Na funkci

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

Použijeme Rolleovu větu a dostaneme požadované tvrzení věty. Podrobnosti v [2].

8.5 Derivace a tečna ke grafu funkce

V tomto článku probereme jak souvisí derivace funkce s tečnou ke grafu funkce. Začneme definicí tečny a hned za ní uvedeme několik obrázků ilustrujících, že tečnu chápeme více jako aproximaci grafu než jako přímku, která se grafu dotýká. V dalších článcích se budeme podrobněji zabývat aproximačními vlastnostmi tečny a v závěrečném článku uvedeme, za jakých podmínek tečna splňuje geometrickou představu.

8.5.1 Definice tečny

Definice tečny ke grafu funkce. Nechť má funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak přímku o rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{8.5}$$

budeme nazývat tečnou ke grafu funkce f v bodě x_0.

Příklad. Napíšeme rovnici tečny ke grafu funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 4$. Spočítáme derivaci funkce f

$$f'(x) = 1/(2\sqrt{x}), \qquad f'(4) = 1/4$$

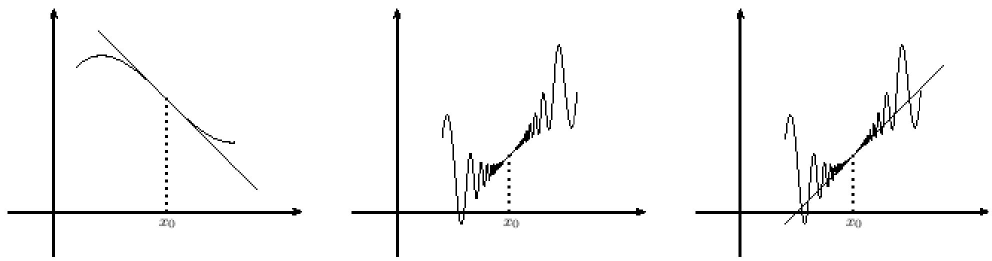
a spolu s $f(4) = 2$ dosadíme do (8.5)

$$y = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 4)$$

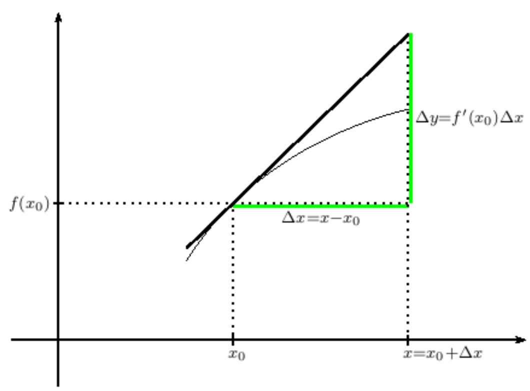
Poznámka. Mluvíme o tečně v bodě x_0 přestože geometricky má tečný bod dvě souřadnice $[x_0, f(x_0)]$. V dalším textu uvidíme, že nás bude víc než geometrie zajímat vztah funkce f a lineární funkce l, jejímž grafem je tečna. Když mluvíme o chování funkce v bodě, máme na mysli bod na ose proměnné funkce, tj. ose x.

Následující obrázky ukazují, že ne vždy výše definovaný pojem tečny naplňuje geometrickou představu tečny. Na obrázku vlevo tečna protíná graf v tečném bodě. Na dalších obrázcích tečna protíná graf v libovolně malém okolí tečného bodu dokonce nekonečněkrát. Na prostředním obrázku je samotný graf funkce, vpravo je spolu s tečnou.

V článku 8.5.5 uvedeme k těmto obrázkům další podrobnosti.



8.5.2 Rovnice tečny a přímá úměrnost



Na obrázku je tečna s vyznačeným tečným bodem $[x_0, f(x_0)]$ a bodem $[x, y]$.
Z podobnosti trojúhelníků plyne, že přírůstek souřadnice y

$$\Delta y = y - f(x_0)$$

je přímo úměrný přírůstku proměnné x

$$\Delta x = x - x_0$$

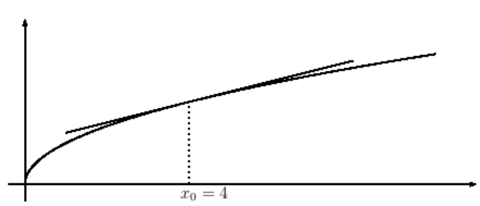
s konstantou úměrnosti $f'(x_0)$.

Tuto úměrnost zapíšeme vztahem ekvivalentním s (8.5)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

8.5.3 Tečna a lokální aproximace

Příklad. Ukážeme, jak lze rovnici tečny použít k přibližnému vyčíslení výrazu. Z rovnice tečny ke grafu funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ v bodě $x = 4$ spočítáme přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$.



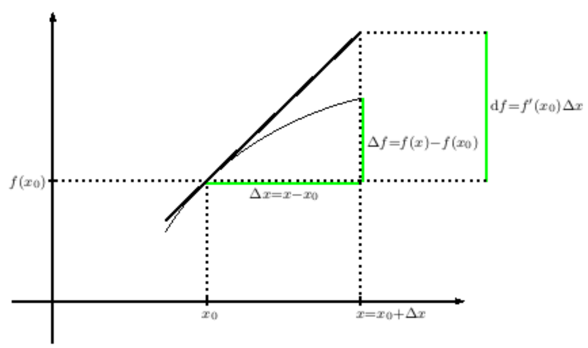
Rovnice tečny v bodě $x_0 = 4$ je

$$y = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 4)$$

Pro $x = 5$ je $y = 2.25$.

Pro porovnání uvedeme přesnou hodnotu odmocniny zaokrouhlenou na setiny $\sqrt{5} \doteq 2.24$.

Na obrázku dole vysvětlíme další pojmy.



Změnu funkční hodnoty budeme nazývat *přírůstkem funkce*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

změnu na tečně budeme nazývat *lineární částí přírůstku funkce*

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\Delta x.$$

Výše uvedený výpočet využívá toho, že pro malé Δx je $\Delta f \doteq \mathrm{d}f$.

Poznámka (důležitá). Přírůstek proměnné $x - x_0$ značíme buď Δx nebo $\mathrm{d}x$. Lineární část přírůstku pak napíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x \tag{8.6}$$

Tento vztah je základ diferenciálního a integrálního počtu od Newtona a Leibnize z konce 17. století. Na přírůstky $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}x$ se tehdy matematici a fyzikové dívali jako na nekonečně malé veličiny. Derivace je pak podíl těchto nekonečně malých veličin. Například pro $f(x) = x^2$ je

$$f'(x) = \frac{(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x = 2x$$

Protože je $\mathrm{d}x$ nekonečně malé, dosadíme za něj v závěru výpočtu nulu. Ale protože je nenulové, můžeme jím v počátku výpočtu dělit. Matematici se dlouhou dobu snažili precizovat tento pojem a odstranit rozpor hodnoty zároveň nulové i nenulové. Nakonec za více jak sto let dospěli k ε-δ definici spojitosti a limity. Za zmínku stojí, že s nekonečně malými hodnotami počítá tzv. nestandardní analýza. Český matematik Petr Vopěnka (1935 – 2015) byl příznivec nestandardní analýzy a považoval zavedení ε-δ definic za zásadní historickou chybu matematiké analýzy.

Vztah (8.6) často píšeme ve tvaru $f'(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Přírůstek funkce $\mathrm{d}f$ často nahrazujeme přírůstkem proměnné. Konkrétně pro pro $y = f(x)$ napíšeme $f'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. A třeba pro $s = f(t)$ napíšeme $f'(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

8.5.4 Chyba lokální aproximace

Rozdíl $\Delta f - \mathrm{d}f$ budeme nazývat *chybou lokální aproximace* funkce f lineární funkcí l v bodě x_0. Přitom grafem lineární funkce l je tečna ke grafu f v bodě x_0. Tedy předpis l je

$$l : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{8.7}$$

Poznámky.

1. Aproximaci nazýváme lokální proto, že je aproximace dobrá jen v okolí bodu x_0.

2. Chybu aproximace lze také zapsat jako rozdíl funkčních hodnot aproximované a aproximující funkce

$$\Delta f - \mathrm{d}f = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f(x) - l(x)$$

Uvedeme několik tvrzení o chybě aproximace. První říká, že je chyba $\Delta f - \mathrm{d}f$ zanedbatelná ve srovnání s Δx.

Lemma o chybě lokální aproximace. Nechť má funkce f v bodě x_0 konečnou derivaci. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = 0$$

Důkaz. Dosazením za $l(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

□

Druhé tvrzení říká, že jiná lineární funkce tuto vlastnost nemá.

Lemma o lokální aproximaci lineární funkcí. Nechť pro funkci f, bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{8.8}$$

Pak má funkce f v bodě x_0 derivaci a ta je rovna A, tedy platí $f'(x_0) = A$.

Důkaz. Vztah (8.8) upravíme na

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = 0$$

odkud plyne existence derivace $f'(x_0)$ a rovnost $f'(x_0) = A$. □

Obě lemmata shrneme do jednoho.

Lemma. Mějme funkci f a bod x_0. Pak pro $A \in \mathbb{R}$ platí (8.8) právě když je $A = f'(x_0)$.

Důkaz. Máme dokázat ekvivalenci, kterou dokazujeme jako dvě implikace, a ty jsou dokázány v předchozích lemmatech. □

Předchozí tvrzení říkají, že při zmenšujícím se $x - x_0$ se chyba zmenšuje rychleji. Další tvrzení umožní chybu přesněji kvantifikovat pomocí hodnot druhé derivace. Druhá derivace je derivací derivace, tedy $f'' = (f')'$.

Věta o chybě lineární aproximace. Má-li funkce f v okolí bodu x_0 druhou derivaci a bod x leží v tomto okolí, přitom $x \neq x_0$, pak mezi body x a x_0 leží bod c takový, že pro chybu lineární aproximace

$$R(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

platí

$$R(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2.$$

Důkaz. Pro chybu $R(x)$ platí $R(x_0) = 0$, $R'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Použijeme Rolleovu větu na funkci

$$F : t \mapsto (t - x_0)^2 R(x) - (x - x_0)^2 R(t),$$

pro kterou platí

$$\begin{aligned} F(x_0) &= (x_0 - x_0)^2 R(x) - (x - x_0)^2 R(x_0) = 0 \\ F(x) &= (x - x_0)^2 R(x) - (x - x_0)^2 R(x) = 0 \\ F'(t) &= 2(t - x_0) R(x) - (x - x_0)^2 (f'(t) - f'(x_0)) \end{aligned}$$

Z Rolleovy věty plyne existence c_1 ležícího mezi x a x_0 a splňujícího $F'(c_1) = 0$.

Dále platí $F'(x_0) = 0$, proto další aplikací Rolleovy věty dostaneme existenci c ležícího mezi c_1 a x_0 takového, že platí

$$F''(c) = 2R(x) - (x - x_0)^2 f''(c) = 0$$

Odtud dostaneme

$$R(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2$$

□

Příklad. Použijeme větu k odhadu chyby aproximace funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v okolí bodu 4, kterou jsme počítali výše. Spočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

V bodě $x = 4$ je

$$f''(4) = -\frac{1}{32} \doteq -0.03$$

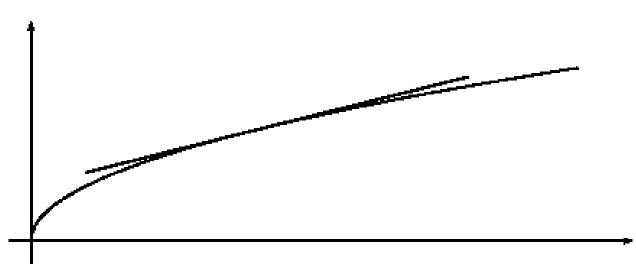
V okolí bodu 4 je $f''(c)$ také přibližně rovna -0.03 (používáme spojitost této druhé derivace). Odtud plyne pro x blízké $x_0 = 4$

$$\sqrt{x} \doteq 2 + \tfrac{1}{4}(x - 4)$$

s chybou řádově rovnou $-0.015(x - 4)^2$, pro $x = 5$ tedy řádově -0.015, což odpovídá tomu, co jsme v příkladě nahoře spočítali.

8.5.5 Tečna a geometrie

Připomeňme graf odmocniny s tečnou v bodě $x = 4$. Tečna leží v pravém i levém okolí bodu x nad grafem funkce. Souvisí to s tím, že je chyba lineární aproximace záporná: $f(x) < l(x)$, tedy $f(x) - l(x) < 0$. A to souvisí s tím, že je v okolí bodu x záporná druhá derivace f''.



Na dalším obrázku jsou grafy z počátku článku o tečnách. Předpis ke grafu vlevo je

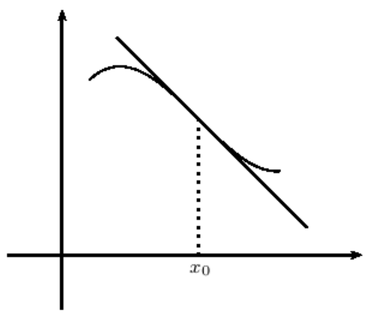
$$f : x \mapsto (x-1)^3 - x + 2$$

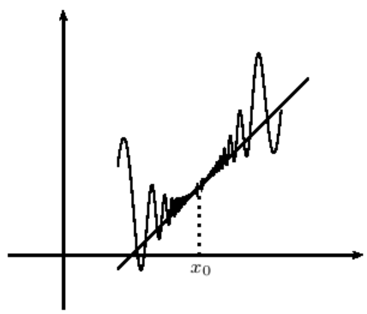
a $x_0 = 1$. Výpočtem dostaneme $f''(x) = 6(x-1)$. V pravém okolí bodu x_0 je druhá derivace kladná, v levém záporná. To vysvětluje, proč tečna protíná graf funkce.

Vpravo je graf spojitého rozšíření funkce

$$x \mapsto x - 0.5 + (x-1)^2(1 + 2\sin(6/(x-1))), \quad x \neq 1$$

Druhá derivace této funkce mění v libovolném okolí bodu $x_0 = 1$ nekonečněkrát znaménko.





8.6 Derivace a monotonie funkce

Věta o neklesající funkci a znaménku derivace. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je f neklesající na I právě když je f' nezáporná na I.

Důkaz. Máme dokázat ekvivalenci, budeme dokazovat dvě implikace. První implikace: je-li f' nezáporná na I, pak je f na I neklesající. Druhá implikace: je-li f neklesající na I, pak je f' na I nezáporná.

Důkaz první implikace: je-li f' nezáporná na I, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, pak z Lagrangeovy věty plyne existence $x_3 \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3) \geq 0,$$

odtud plyne $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ a tedy je f neklesající na I.

Místo druhé implikace dokážeme její obměnu: není-li f' nezáporná na I, pak není f neklesající na I: pokud není f' na intervalu I nezáporná, existuje $x_0 \in I$, pro něž je $f'(x_0) < 0$. Z lemmatu o znaménku derivace a chování v okolí z článku 8.3, plyne, že f není v okolí x_0 neklesající, a tedy ani není neklesající na I. $\square$

Věta o nerostoucí funkci a znaménku derivace. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je f nerostoucí na I právě když je f' nekladná na I.

DŮKAZ. Stačí použít předchozí větu na funkci $-f$. $\square$

Věta o nulové derivaci. Má-li funkce f na intervalu $I = (a, b)$ nulovou derivaci, pak je f na I konstantní.

DŮKAZ. Z předchozích vět plyne, že funkce f je na intervalu I neklesající a nerostoucí. Odtud plyne, že je konstantní. $\square$

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I$.

DŮKAZ. Opět dokážeme dvě implikace.

První implikace: nechť je f rostoucí na I. Pak z předchozí věty plyne, že má f na I nezápornou derivaci. Zbývá ukázat, že derivace f' není nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I$ – to plyne z věty o nulové derivaci a z toho, že je f rostoucí.

Opačná implikace: z předchozí věty víme, že z nezápornosti derivace plyne, že je funkce neklesající. Chceme ukázat, že je rostoucí. Rozebereme, co platí pro funkci, která není rostoucí, ale je neklesající: existují $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pro něž je $f(x_1) = f(x_2)$. Protože je f neklesající na I, je konstantní na $I_1 = (x_1, x_2)$. Odtud plyne, že má f na I_1 nulovou derivaci, a to vylučují předpoklady věty. Proto je f na I rostoucí. $\square$

Příklad. Funkce $f : x \mapsto x^3$ má na $\mathbb{R}$ derivaci $f' : x \mapsto 3x^2$. Derivace f' je nezáporná na $\mathbb{R}$ a nulová je jen v bodě $x = 0$, tedy není nulová na žádném intervalu. Proto je f podle předchozí věty rostoucí na $\mathbb{R}$.

Poznámka. Všechny tři věty platí i pro jiné než otevřené intervaly, tedy intervaly $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ za stejných předpokladů pro derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a případné spojitosti v krajních bodech intervalu.

Uvedeme znění poslední věty. Necháme na čtenáři ověřit, že důkazy budou stejné jako pro otevřený interval.

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace pro interval uzavřený zleva. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I_v = (a, b)$ derivaci a nechť je spojitá na intervalu $I = [a, b)$. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I_v a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I_v$.

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace pro interval uzavřený zprava. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I_v = (a, b)$ derivaci a nechť je spojitá na intervalu $I = (a, b]$. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I_v a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I_v$.

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace pro uzavřený interval. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I_v = (a, b)$ derivaci a nechť je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I_v a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I_v$.

8.7 Kalkulus derivací podruhé

8.7.1 Derivace složené funkce

Větu o derivaci složené funkce najde čtenář v [2] pod číslem 5.2.8. K důkazu je v [2] použita pomocná Carathéodoryho funkce. My zde ukážeme hlavní myšlenku důkazu bez této funkce a řekneme, v čem je pak v důkazu problém. Pro $x \neq x_0$, $f(x) \neq f(x_0)$ platí

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme za předpokladu existence derivací napravo

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$

Problém je s výše uvedenou podmínkou a s existencí derivací. S $x \neq x_0$ problém není, protože je na prstencovém okolí bodu x_0 splněná. Druhá podmínka $f(x) \neq f(x_0)$ splněná být nemusí. To je důvod, proč je v [2] v důkazu použita Carathéodoryho funkce.

Ještě vysvětlíme, jak lze pravidlo o derivaci složené funkce zapsat pomocí nekonečně malých veličin z (8.6). Složenou funkci zapíšeme pomocí tří proměnných

$$z = g(y) \qquad y = f(x)$$

a derivace zapíšeme pomocí přírůstků

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Pravidlo pro derivaci složené funkce pak napíšeme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

8.7.2 Derivace pro ostatní racionální exponenty

Pravidlo pro derivaci složené funkce procvičíme na odvození vzorců pro derivaci mocnin s racionálním exponentem. Nechť jsou n, m kladná přirozená čísla. Pak

1. $(\sqrt[n]{x^m})' = \frac{1}{n}(x^m)^{1/n-1}(x^m)' = \frac{1}{n}x^{m/n-m}mx^{m-1} = \frac{m}{n}x^{m/n-1}$
2. $(1/\sqrt[n]{x^m})' = -(\sqrt[n]{x^m})'/(\sqrt[n]{x^m})^2 = -\frac{m}{n}x^{m/n-1}x^{-2m/n} = -\frac{m}{n}x^{-m/n-1}$

ZÁVĚR: vztah $(x^q)' = qx^{q-1}$ platí pro všechna $q \in \mathbb{Q}$. Definiční obory funkce a derivace závisí na hodnotě q. Pokud o hodnotě q nemáme žádné informace, tak jsou „bezpečné“ hodnoty pro x jen $x > 0$. Z toho důvodu je za definiční obor obecné mocninné funkce $x \mapsto x^\alpha$ zpravidla považován interval $x > 0$.

8.7.3 Derivace inverzní funkce

Složením funkce f s inverzní funkcí f^{-1} dostaneme identitu $\mathrm{id} : x \mapsto x$, která má derivaci rovnu jedné. Odtud a z pravidla pro derivaci složené funkce plyne

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

Symbol $(f^{-1})'(f(x))$ označuje hodnotu derivace funkce f^{-1} v bodě $f(x)$. Označíme-li $y = f(x)$, přepíšeme vztah na

$$(f^{-1})'(y)f'(x) = 1 \tag{8.9}$$

Nebo pomocí nekonečně malých veličin z (8.6) napíšeme větu o derivaci inverzní funkce

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

8.7.4 Derivace odmocnin podruhé

Z pravidla pro derivaci inverzní funkce odvodíme derivaci odmocniny. Pro $x > 0$ položme $y = f(x) = x^n$. Pak z (8.9) plyne

$$(\sqrt[n]{y})' n x^{n-1} = 1$$

Po dosazení $x = \sqrt[n]{y}$ a po úpravě dostaneme

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n y^{(n-1)/n}}$$

8.7.5 Limita a spojitost derivace

Vyložíme, jak počítat derivaci funkcí zadaných „po částech". Jako modelový příklad nám bude sloužit následující funkce s absolutní hodnotou.

$$f : x \mapsto |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1 - x^2 & x \in (-1, 1) \\ 0 & x \in \{1, -1\} \end{cases}$$

Protože je derivace limita, závisí její hodnota v bodě x jen na hodnotách v okolí tohoto bodu. Proto je pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ derivace rovna $f'(x) = 2x$. Pro $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) = -2x$. V bodech $x \in \{-1, 1\}$ buď spočítáme derivaci přímo z definice nebo použijeme následující větu.

Věta o limitě derivace. Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 a derivace f' má v x_0 limitu, případně jednostrannou limitu, pak má f v bodě x_0 derivaci, případně jednostrannou derivaci a platí

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

případně

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

případně

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

Důkaz. Dokážeme vztah pro limitu zprava. Podobně se dokáže vztah pro limitu zleva a odtud pak plyne vztah pro oboustrannou limitu.

Funkce f má na pravém okolí $(x_0, x_0 + \delta)$ konečnou derivaci, je tedy na tomto okolí spojitá. Zároveň víme, že je v bodě x_0 spojitá zprava. Jsou tedy splněny předpoklady Lagrangeovy věty, a tedy k $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ existuje $c_x \in (x_0, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$$

Předpokládáme, že existuje limita f' pro $x \to x_0^+$, ta je rovna limitě $f'(c_x)$ pro $x \to x_0^+$. Využíváme, že pro $x \to x_0^+$ se c_x také blíží k x_0 zprava. Proto platí

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

$\square$

Pro výše uvedený příklad je

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2, \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -2x = -2$$

Z věty pak plyne $f'_+(1) = 2$, $f'_-(1) = -2$.

8.7.6 Výpočet derivací

Vrátíme se k příkladům, které jsem počítali v článku 8.1 a ukážeme, jak je spočítat pomocí pravidel odvozených v tomto článku.

1. $f : x \mapsto x^2$
   $f'(x) = 2x$, a proto je $f'(2) = 4$

2. $f : x \mapsto \sqrt{x}$
   $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, a proto je $f'(1) = 1/2$

3. $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$
   Použijeme vlastnost limity – její hodnota záleží jen na hodnotách funkce v okolí bodu, libovolně malém, ve kterém limitu počítáme. Pro $x > 0$ je $f(x) = 1$, a tedy $f'(x) = 0$. Podobně dostaneme $f'(x) = 0$ pro $x < 0$. Derivaci v nule pomocí vzorců spočítat neumíme, musíme postupovat jako v článku 8.1. Případně použijeme větu o spojitosti funkce v bodě, ve kterém má vlastní derivaci. Funkce sgn není v bodě nula spojitá, proto v tomto bodě nemůže mít vlastní derivaci.

4. $f : x \mapsto |x^2 - 1|$
   Derivace jsme spočítali v článku 8.7.5 se stejným výsledkem jako v 8.1.

5. Pokusíme-li se použít postup z předchozího příkladu na výpočet derivace funkce $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ v bodě nula, dostaneme pro $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \sin(1/x)$. Protože f' nemá v bodě nula limitu, není možné použít větu o limitě derivace a je třeba postupovat jako v článku 8.1.

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$
   $f'(x) = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2}$

8.8 Řešené příklady

1. Najdeme intervaly, na nichž je funkce f rostoucí.

$$f : x \mapsto 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12$$

   Spočítáme derivaci

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$$

   Řešením rovnice $f'(x) = 0$ je $x \in \{1, -1\}$.
   Řešením nerovnice $f'(x) \geq 0$ je $x \geq -1$.

   Závěr: funkce je rostoucí na intervalu $[-1, +\infty)$. Plyne to z věty o rostoucí funkci a znaménku derivace (pro interval uzavřený zleva).

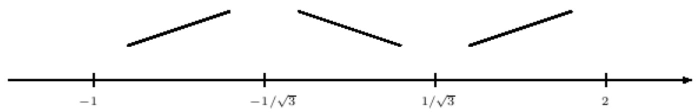
2. Nalezneme obrazy intervalů $I_1 = [-1, 2]$, $I_2 = [-1, 2)$, $I_3 = (-1, 2]$, $I_4 = (-1, 2)$ ve funkci $f : x \mapsto x^3 - x$.

   Víme, že obraz $f(I_1)$ je uzavřený interval.[1] Krajními body tohoto intervalu jsou minimální a maximální hodnota, kterou funkce f nabývá na intervalu I_1. Abychom tyto hodnoty zjistili, potřebujeme znát monotonii funkce f, proto spočítáme první derivaci: $f'(x) = 3x^2 - 1$ a vyřešíme nerovnice $f'(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$.

   Výsledky znázorníme na schematu dole. Zajímavé body ve schematu umístíme ve správném pořadí, na jejich vzdálenostech nám nezáleží.

[1] Obraz uzavřeného intervalu ve spojité funkci je uzavřený interval. Viz věta 4.3.34 z [2].

Schema vyjadřuje, že je funkce f rostoucí na intervalu $[-1, -1\sqrt{3}]$, klesající na intervalu $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ a rostoucí na intervalu $[1/\sqrt{3}, 2]$.



Odtud plyne, že minimální hodnota je jedna z hodnot $f(-1)$, $f(1/\sqrt{3})$. Výpočtem dostaneme $f(-1) = 0$, $f(1/\sqrt{3}) = -2/\sqrt{27}$. Ze znamének obou hodnot určíme, že minimální hodnota je $-2/\sqrt{27}$.

Podobně zjistíme, že maximální hodnota je jedna z hodnot $f(-1/\sqrt{3}) = 2\sqrt{27}$, $f(2) = 6$. Bezpoužití kalkulačky je vidět, že $2/\sqrt{27} < 1$, maximální hodnota je tedy $f(2) = 6$.

ZÁVĚR: $f(I_1) = [-2/\sqrt{27}, 6]$.

Obrazy dalších intervalů určíme úvahou z obrazu I_1. Hodnotu $f(2) = 6$ nabývá funkce na I_1 pouze v bodě $x = 2$. Hodnotu $f(-1) = 0$ nabývá i v některém bodě intervalu $(1/\sqrt{3}, 2)$. U této konkrétní funkce je snadné spočítat, že je to v bodě $x = 1$. Obecně dostaneme výsledek z věty o nabývání mezihodnot.

ZÁVĚR:

$$
\begin{aligned}
f(I_2) &= f([-1,2)) = [-2/\sqrt{27}, 6) \\
f(I_3) &= f((-1,2]) = [-2/\sqrt{27}, 6] \\
f(I_4) &= f((-1,2)) = [-2/\sqrt{27}, 6)
\end{aligned}
$$

Kapitola 9

Elementární funkce

Mezi *elementární funkce* patří funkce probrané v kapitole Aritmetika a funkce a dále čtyři typy tzv. *transcendentních elementárních* funkcí. Jsou to *exponenciální*, *logaritmické*, *goniometrické* a *cyklometrické* funkce.

V této kapitole se budeme zabývat definicemi transcendentních elementárních funkcí a odvodíme vzorce pro jejich derivace.

Při výkladu exponenciální funkce $x \mapsto a^x$ začneme zopakováním mocninné funkce s přirozeným exponentem a postupně budeme mocniny zobecňovat (rozšiřovat) na celé, racionální a reálné exponenty. Základem pro toto rozšiřování bude vztah (9.1) platný pro přirozené exponenty. Budeme požadovat jeho platnost pro reálné exponenty.

Logaritmickou funkci budeme definovat jako inverzní funkci k exponenciální funkci.

Goniometrické funkce budeme pro úhel z intervalu $(0, \pi/2)$ definovat pomocí pravoúhlého trojúhelníku. Definici rozšíříme na $\mathbb{R}$ pomocí jednotkové kružnice. Z této definice odvodíme vzorce, které budeme používat při výpočtech.

Cyklometrické funkce budeme definovat jako inverzní k vhodně zúženým goniometrickým funkcím. Cyklometrické funkce potřebujeme k vyřešení rovnic typu $\sin x = 0.2$ a na kalkulačce je najdeme pod symboly typu $\sin^{-1}$. Je dobré pamatovat, že zde není -1 exponentem ve smyslu mocniny, ale že značí inverzní funkci.

Zmíníme se o definici exponenciální funkce a goniometrických funkcí pomocí funkcionální rovnice. Tyto definice přebíráme z [2] jako zajímavost a rozšíření obzoru.

K odvození vzorců pro derivace budeme potřebovat následující limity.

Hodnota první závisí na zvolených jednotkách. Ukážeme, že pro *radiány* má hodnotu rovnu *jedné*. Hodnota druhé závisí na zvoleném základu.[1] Ukážeme, že pro základ splňující $(\forall x \in \mathbb{R})(e^x \geq 1 + x)$ je limita rovna jedné a prozradíme, že tímto základem je Eulerovo číslo $e \doteq 2.718$

Obě limity mají význam derivace v bodě nula.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Od výše uvedených limit odvodíme další limity (všechny jsou rovny jedné)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$$

9.1 Mocniny

V článku 4.1 jsme probrali mocniny s přirozeným exponentem. Zde se zamyslíme nad mocninami s obecnějším exponentem. Začneme otázkami.

Otázky. Proč je $2^0 = 1$? Proč je $3^{1/2} = \sqrt{3}$? Proč je $4^{-1} = 1/4$?
Které rovnosti se vzdáte?

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$$

A které rovnosti se vzdáte zde?

$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = 1$$

Úkol. Nakreslete do jednoho obrázku grafy mocninných funkcí s exponenty jedna, dva, tři, jedna polovina, jedna třetina, tři poloviny, pět polovin.

Z definice mocniny s přirozeným exponentem (4.1) plynou následující vztahy, které použijeme k zobecnění pojmu mocniny pro obecnější exponenty. Prostě budeme požadovat jejich platnost a podíváme se, co z této platnosti plyne.

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad a^{nm} = (a^n)^m \tag{9.1}$$

[1] Ve skutečnosti můžeme změnu základu také interpretovat jako změnu jednotek.

9.1.1 Mocniny s celočíselným exponentem

Z (4.1) plyne, že posloupnost

$$a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

je geometrická s kvocientem a. Když k této posloupnosti přidáme na začátek další členy

$$\dots a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

a budeme požadovat, aby byla také geometrická[2], dostaneme pro $a \neq 0$

$$a^0 = a^1/a = 1, \quad a^{-1} = a^0/a = 1/a, \quad a^{-2} = a^{-1}/a = 1/a^2, \dots$$

Jiný způsob odvození je použít vztah (4.1) $a^n = a \cdot a^{n-1}$, vyjádřit z něj $a^{n-1} = a^n/a$ a použít pro $n \in \mathbb{Z}$.

9.1.2 Mocniny s racionálním exponentem

K odvození vztahu pro $a^{1/2}$ použijeme (9.1) s $n = m = 1/2$. Dostaneme $a = a^1 = a^{1/2+1/2} = a^{1/2}a^{1/2}$ a odtud dostaneme pro $a^{1/2}$ rovnici $\left(a^{1/2}\right)^2 = a$, a tedy jsou dvě možnosti: buď je $a^{1/2} = \sqrt{a}$ nebo $a^{1/2} = -\sqrt{a}$.

Výběr znaménka zdůvodníme následovně

$$0 \leq \left(a^{1/4}\right)^2 = a^{1/4}a^{1/4} = a^{1/4+1/4} = a^{1/2}.$$

Podobně odvodíme $\left(a^{1/3}\right)^3 = a$ a tedy $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$.

Definice. Pro $a > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ definujeme

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} \qquad a^{-n/m} = 1/\sqrt[m]{a^n} \tag{9.2}$$

Úkol. Ukažte, že pro $p, q, r \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qr]{a^{pr}}$.

Poznámky. Tvrzení v předchozím úkolu zajistí, že je definice s racionálním exponentem nezávislá na způsobu zadání exponentu.
Podle uvedené definice je mocnina s racionálním exponentem definovaná pouze pro kladný základ.

---

[2]Za tento způsob odvození patří poděkování studentu Martinu Nebeskému.

Úkol pro dlouhé zimní večery. Ukažte, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí $a^{q_1+q_2} = a^{q_1}a^{q_2}$.

NÁVOD. Je třeba ukázat, že pro přirozená čísla p, q, r, s platí $\sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$, a $\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}}$.

Úkol pro dlouhé zimní večery. Ukažte, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí $a^{q_1q_2} = (a^{q_1})^{q_2}$.

NÁVOD. Je třeba ukázat, že pro přirozená čísla p, q, r, s platí $\sqrt[qs]{a^{pr}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$, a $1/\sqrt[qs]{a^{pr}} = \sqrt[s]{\left(1/\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$.

Důsledek. Vztah (9.1) platí i pro racionální exponenty.

9.2 Exponenciální funkce

Terminologická poznámka. Mocninná funkce má proměnný základ a konstantní exponent, například $x \mapsto x^2$. Funkci, která má konstantní základ a proměnný exponent nazýváme *exponenciální funkcí.*

V článku 9.1 jsme v (9.2) definovali hodnotu exponenciální funkce pro racionální exponent. Zbývá odpovědět na následující otázku.

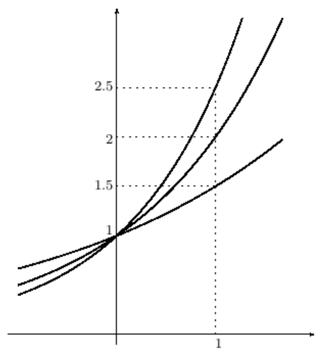
Otázka. Jak je definováno $2^{\sqrt{2}}$? Obecněji: jak je definována mocnina s iracionálním exponentem?

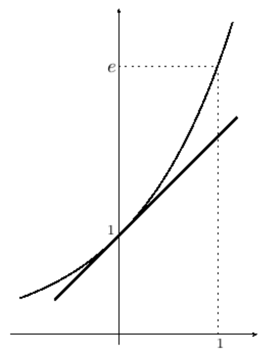
Odpověď, kterou dostávám od studentů: pomocí logaritmů. Protože je $\ln 2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln 2$, je $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2}$. Tím jsme převedli výpočet $2^{\sqrt{2}}$ na výpočet $e^{\sqrt{2}\ln 2}$, ale na otázku o mocnině s iracionálním exponentem jsme neodpověděli. Jen jsme převedli jednu mocninu s iracionálním exponentem na jinou.

Lepší odpověď: odmocninu ze dvou můžeme přibližně nahradit racionálním číslem, například postupně zpřesňujícím se desetinným rozvojem odmocniny: 1.4, 1.41, 1.414, ... a tedy odmocninu ze dvou můžeme postupně vyjádřit přibližně jako $2^{1.4} = \sqrt[5]{2^7}$, $2^{1.41} = \sqrt[100]{2^{141}}$, ...

Jinými slovy funkci $x \mapsto 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ dostaneme jako spojité rozšíření funkce $q \mapsto 2^q$, $q \in \mathbb{Q}$.

9.2.1 Eulerovo číslo





Na levém obrázku jsou grafy exponenciálních funkcí s různými základy. Všechny protínají osu y v bodě $[0,1]$, ale pod různým úhlem. Eulerovo číslo $e \doteq 2.718$ se vyznačuje tím, že graf protíná osu y pod úhlem $\pi/4$.

Přímka vyznačená na obrázku o rovnici $y = x + 1$ je tečnou grafu, což vyjádříme pomocí limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{9.3}$$

9.2.2 Funkcionální rovnice

V [2] je exponenciální funkce definována větou 6.3.3[3] jako funkce f splňující dvě podmínky

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x+y) = f(x)f(y)) \tag{9.4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \tag{9.5}$$

Náš přístup je podobný, jen používáme jiné značení. Ukážeme, že vztah (9.4) je jen jiný zápis (9.1): napíšeme-li a^x místo $f(x)$ a podobně a^y místo $f(y)$ a a^{x+y} místo $f(x+y)$ a přejmenujeme x na n a y na m, dostaneme místo vztahu $f(x+y) = f(x)f(y)$ vztah $a^{n+m} = a^n a^m$.

Důsledky (9.4) jsou v [2] rozebrány v lemmatu 6.3.1. Jsou to jen jinak zapsané úvahy jako výše v článku 9.1.

Neznámá v rovnici (9.4) je funkce, proto ji nazýváme funkcionální rovnicí.

Podmínka (9.5) má v definici exponenciály dva významy: jednak zaručí spojitost a za druhé vybere mezi exponenciálními funkcemi tu, která má za základ Eulerovo číslo.

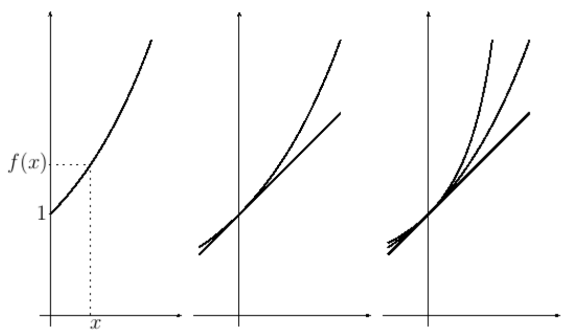
[3] Naše formulace „definována větou“ je silně matoucí, proto ji vysvětleme. Ve větě je tvrzeno, že existuje právě jedna funkce podmínkám ve větě vyhovujícím. Ta je pak nazvána exponenciálou, viz definice 6.3.8, a označena symbolem exp (ten asi má být použit i v definici 6.3.8 místo symbolu f).

V [2] jsou v lemmatu 6.3.5 uvedeny podmínky které jsou za předpokladu platnosti (9.4) ekvivalentní a jednou z nich je (9.5). Znamená to, že ve větě 6.3.3 můžeme použít kteroukoliv z nich a dostaneme stejný výsledek. Podmínky zde ocitujeme a rozebereme na grafech.

(1)
$$\lim_{x\to 0}(f(x)-1)/x = 1$$

(2)
$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 1 + x) \tag{9.6}$$

(3)
$$[\forall x \in (-\infty, 1)]\left[1 + x \leq f(x) \leq (1-x)^{-1}\right]$$



Podíl $(f(x)-1)/x$ z podmínky (1) je směnice úsečky spojující body $(0,1)$, $(x, f(x))$ na levém obrázku. Na obrázku uprostřed jsou vyznačeny grafy obou stran nerovnosti z bodu (2). Na obrázku vpravo jsou grafy výrazů z nerovností (3).

V následující úloze ukážeme, že z (2) plyne (1).

Úloha. Ukažte, že z
$$(\forall x \in \mathbb{R})(e^x \geq x + 1)$$
plyne pro $x \in (0,1)$
$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$
a pro $x < 0$
$$1 \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x}$$
a odtud a z věty o třech limitách[4] plyne $(e^x - 1)/x \to 1$ pro $x \to 0$.

Návod. Vztah $e^x \geq x + 1$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, proto do něj můžeme za x dosadit např. $-x$. Dostaneme $e^{-x} \geq -x + 1$ a upravíme. Při úpravě použijeme vztah $e^{-x} = 1/e^x$.

[4] Věta o třech limitách je také známá jako policejní věta.

Značení. Ve shodě s matematickou literaturou budeme exponenciální funkci značit symbolem exp, tedy místo e^x budeme psát $\exp(x)$ případně $\exp x$.

Poznámka o Eulerovu číslu. Výše jsme se zmínili, že základem exponenciály je Eulerovo číslo e. Důkaz existence funkce splňující (9.4), (9.5) používá funkci

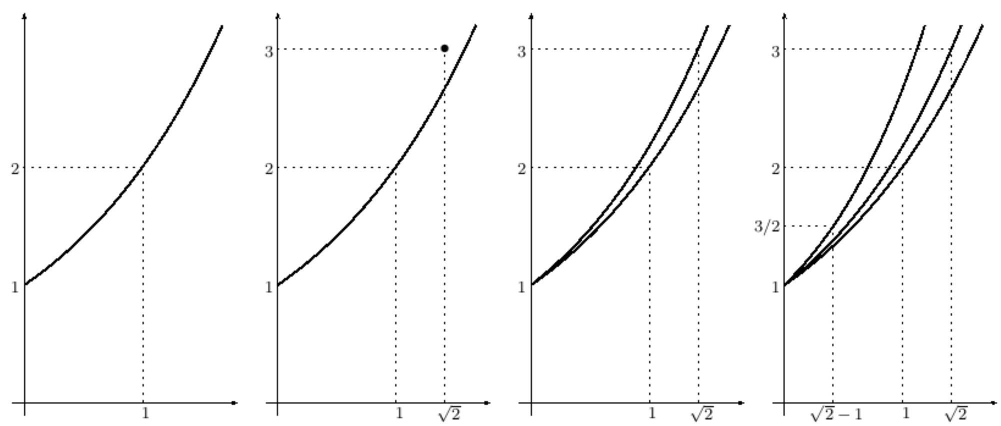
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{x}{n})^n \tag{9.7}$$

Odtud plyne, že $f(1) = \lim(1 + 1/n)^n$, a tedy $e = \lim(1 + 1/n)^n$.

Pokud čtenáře zajímá, odkud se vzal vztah (9.7), odkazujeme jej na poznámku 6.3.10 v [2].

9.2.3 Nespojitá rozšíření

Ukážeme, jak by vypadal graf exponenciální funkce, kdybychom ji z $\mathbb{Q}$ rozšířili na $\mathbb{R}$ jinak než spojitě a stále požadovali splnění (9.4). V celém článku 9.2.3 značí q racionální číslo.



Na levém grafu je funkce $f : q \mapsto 2^q$. Na druhém grafu zleva je funkce f rozšířena hodnotou 3 v bodě $x = \sqrt{2}$. Odtud lze, podobně jako v článku 9.1, odvodit rozšíření v bodech $x = q\sqrt{2}$ hodnotami $3^q = 3^{x/\sqrt{2}}$ – graf vidíte na třetím obrázku.

Z $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 3$ a z (9.4) plyne $f(\sqrt{2} - 1)f(1) = f(\sqrt{2})$, a tedy $f(\sqrt{2}-1) = f(\sqrt{2})/f(1) = 3/2$ a odtud (podobně jako v 9.1) $f(q(\sqrt{2}-1)) = (3/2)^q$, a to je znázorněno na grafu vpravo.

Podobně bychom mohli pokračovat pro $m\sqrt{2} + n$ s celočíselnými m, n a dostali bychom graf, který je hustý[5] v horní polorovině.

[5] Myslíme tím, že v každém sebemenším čtverečku se nachází alespoň jeden bod grafu.

V [2] jsou úvahy o nespojitém rozšíření v oddílu o aditivních funkcích v poznámce 6.2.7.

9.2.4 Aditivní a homogenní zobrazení

Z lineární algebry znáte pojem lineárního zobrazení. Připomeneme, že je to zobrazení mezi vektorovými prostory $L : V_1 \to V_2$ splňující

1. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1)(L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{u}))$
   tuto vlastnost nazýváme aditivitou

2. $(\forall \mathbf{u} \in V_1)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(L(\alpha \mathbf{u}) = \alpha L(\mathbf{v}))$
   tuto vlastnost nazýváme homogenitou

My se zde omezíme na jednorozměrné vektorové prostory, tedy $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$. Aditivita $(\forall x, y \in \mathbb{R})(L(x + y) = L(x) + L(y))$ připomíná (9.1), případně (9.4). Plyne z ní pro racionální q a reálné x vztah $L(qx) = qL(x)$, tedy skoro homogenita. Je tedy přirozené položit si otázku, zda existují zobrazení, která jsou aditivní, ale nejsou homogenní.

Odpověď je následující:[6] pokud je zobrazení L spojité, tak z aditivity plyne homogenita. Nehomogenní aditivní zobrazení tedy nemůže být spojité. Dá se ukázat, že jeho graf hustě[7] vyplní celou rovninu.

9.2.5 Derivace exponenciální funkce

Odvodíme vzorec pro derivaci $\exp'$

$$\exp'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h}$$

Úpravou $\exp(x + h) = \exp(x)\exp(h)$ a vytknutím $\exp(x)$ dostaneme

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h} = \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \cdot 1 = \exp(x)$$

Poznámka. Limita $\lim_{h\to 0}(\exp(h)-1)/h$ je, jak jsme viděli výše, důsledkem nerovnosti (9.6) a znamená, že graf exponenciální funkce protíná osu y pod úhlem $\pi/4$.

[6] Naše úvaha a na ní založené tvrzení se týká vektorových prostorů nad tělesem reálných čísel.

[7] Se stejným významem slova hustý jako výše, ale tentokrát v celé rovině.

9.2.6 Vlastnosti exponenciální funkce

Vyslovíme několik vlastností exponenciální funkce a ukážeme, jak plynou z (9.4), (9.5).

1. **Nezápornost** plyne z $\exp(x) = \exp(x/2+x/2) = \exp(x/2)\exp(x/2) \geq 0$.

2. **Kladnost.** Pokud by pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ platilo $\exp x = 0$, pak by pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ platilo $\exp y = \exp x \exp(y-x) = 0$. Pak by, ale nemohlo platit (9.5). Funkce je tedy nejen nezáporná, ale dokonce kladná.

3. **Monotonie.** Z $\exp' = \exp$ a bodu 2 plyne kladnost derivace $\exp'$ a odtud plyne, že je exp rostoucí na svém definičním oboru (tedy $\mathbb{R}$).

4. **Spojitost** Z existence konečné derivace plyne spojitost.[8]

5. **Limity v nekonečnech.** Ukážeme, že limita exponenciální funkce v plus nekonečnu se rovná plus nekonečnu. Nabízí se použít vztah (9.6), fakt, že funkce $x \mapsto x+1$ má v plus nekonečnu limitu rovnu plus nekonečnu a obdobu policejní věty pro nevlastní limitu.
   Jak ukážeme, že (9.6) plyne z (9.4), (9.5)? Třeba tím, že použijeme lemma 6.5.3 z [2]. Nebo použijeme: $\exp(0) = 1$, $\exp'(0) = 1$, tedy $y = x+1$ je tečnou ke grafu v bodě nula a protože je druhá derivace $\exp''$ kladná, leží graf podle věty o chybě lokální aproximace z podkapitoly 8.5.4 nad tečnou.

   Ukázali jsme tedy
   $$\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$$
   Druhá limita snadno plyne po substituci $y = -x$ a použití $\exp(-x) = 1/\exp x$ z věty o limitě podílu
   $$\lim_{x \to -\infty} \exp x = \lim_{y \to +\infty} \exp(-y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\exp y} = 0$$

6. **Obor Hodnot.** Z 5 a 4 plyne, že oborem hodnot exponenciální funkce je interval $(0, +\infty)$.

[8] Viz [2], věta 5.1.10.

9.3 Logaritmické funkce

O exponenciální funkci exp víme

1. Její definiční obor je $\mathbb{R}$.
2. Je rostoucí (na svém definičním oboru).
3. Její obor hodnot je $(0, +\infty)$.

Odtud plyne existence inverzní funkce s definičním oborem $(0, +\infty)$ a oborem hodnot $\mathbb{R}$. Tuto inverzní funkci nazýváme logaritmem, značíme log. Na rozdíl od školské matematiky, kde je tímto symbolem značen dekadický logaritmus, my budeme takto značit přirozený logaritmus.[9]

Definice logaritmu. Kořen $x \in \mathbb{R}$ rovnice $\exp(x) = y$ nazýváme logaritmem čísla y. Značíme $x = \log y$.

Poznámky.
Obor hodnot exponenciální funkce je $(0, +\infty)$, proto je logaritmus definován pro kladné argumenty.[10]
Exponenciální funkce je rostoucí a tedy prostá, proto k $y > 0$ existuje právě jedno x splňující rovnici $\exp(x) = y$. Logaritmus je tedy definován jednoznačně a je funkcí.

Pomocí logaritmu definujeme exponenciální funkci s obecným základem. Pro $a > 0$ definujeme

$$a^x = \exp(x \log a) \tag{9.8}$$

Z věty o derivaci složené funkce pak plyne

$$(a^x)' = a^x \log a$$

Ze vztahu (9.8) odvodíme vztah pro logaritmus s obecným základem

$$y = \exp(x \log a) \quad \ldots \quad \log y = x \log a \quad \ldots \quad x = \frac{\log y}{\log a}$$

[9] V matematické literatuře se dekadický logaritmus v podstatě nevyskytuje a je tam námi používané značení běžné.

[10] Argumentem logaritmu rozumíme výraz, který logaritmujeme. Např. argumentem $\log(2x-1)$ je výraz $2x - 1$. Podobně ve výrazu $\sin 2x$ je $2x$ argumentem sinu.

9.3.1 Odvození vzorců pro logaritmus

Ukážeme, jak se známé vzorce pro logaritmus součinu a podílu odvodí ze vztahu pro exponenciálu. Dosadíme $a = \exp x$, $b = \exp y$ a odtud vyjádřené $x = \log a$, $y = \log b$ do (9.4). Dostaneme

$$\exp(\log a + \log b) = ab$$

a další úpravou dostaneme vzorec pro logaritmus součinu

$$\log a + \log b = \log(ab)$$

Vzorec pro logaritmus podílu dostaneme dosazením $c = ab$, $b = c/a$

$$\log a + \log(c/a) = \log c$$

a úpravou

$$\log(c/a) = \log c - \log a$$

9.3.2 Limity

Dosadíme do limity (9.3) $y = \exp x$ a dále $z = y - 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} \ = \ \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\log y} \ = \ \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log(1+z)}$$

Všechny tři limity jsou rovny jedné a věta o limitě podílu nám dá limity převrácených hodnot

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \ = \ 1 \tag{9.9}$$

9.3.3 Derivace logaritmu

Vzorec pro derivaci logaritmu odvodíme jako limitu

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

Po úpravách

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h/x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h/x)}{h/x} \frac{1}{x}$$

a použití limity (9.9) dostáváme vzorec

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \tag{9.10}$$

Ukážeme ještě jedno odvození tohoto vzorce (9.10). Použijeme větu o derivaci inverzní funkce.

Derivaci vyjádříme jako podíl linearizovaných přírůstků

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Derivaci inverzní funkce $g = f^{-1}$ vyjádříme také jako podíl linearizovaných přírůstků

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

odkud plyne

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{9.11}$$

Dosaďme $f = \exp$. Dostaneme

$$(\log y)' = \frac{1}{\exp x}$$

a po dosazení $\exp x = y$ dostaneme (9.10).

9.4 Goniometrické funkce

9.4.1 Trigonometrická definice

Pro ostré úhly definujeme goniometrické funkce, tedy funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens a méně známé sekans: $\sec x = 1/\cos x$ a kosekans: $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ jako podíl délek určité dvojice stran pravoúhlého trojúhelníku.

Podstatné je, že tento podíl závisí jen na velikosti daného úhlu, a ne na dalších veličinách trojúhelník charakterizujících.[11]

Úlohy.

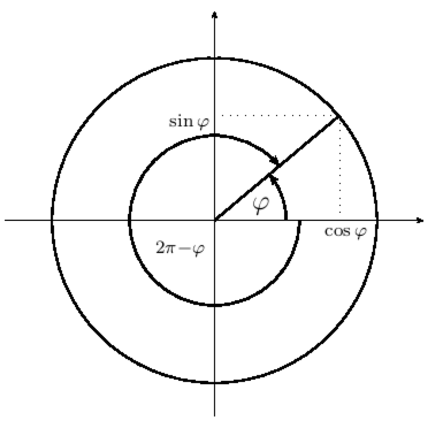
[11] Například na velikostech stran.

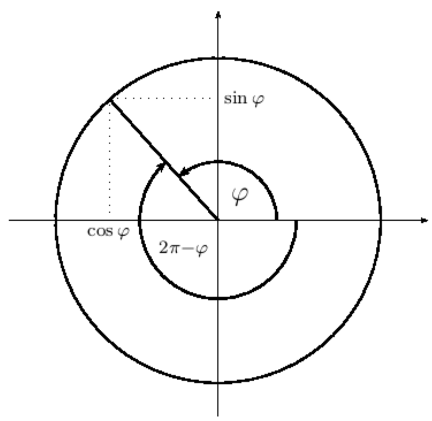
1. Zdůvodněte, proč podíl dvou stran v pravoúhlém trojúhelníku závisí jen na velikostech vnitřních úhlů trojúhelníku a poloze stran[12] vzhledem k vybranému úhlu.

2. Vyjádřete funkce sekans a kosekans jako podíl délek stran pravoúhlého trojúhelníku.

9.4.2 Definice na jednotkové kružnici

Trigonometrická definice je jen pro ostré úhly, tedy pro úhly, jejichž hodnota v radiánech[13] je z intervalu $(0, \pi/2)$. Rádi bychom definici rozšířili na množinu reálných čísel. Použijeme k tomu jednotkovou kružnici.





Na obou obrázcích je jednotková kružnice a úhel φ.[14] Velikost úhlu měříme od kladné poloosy x proti směru hodinových ručiček. Uvažujeme i záporné velikosti úhlu a v tom případě úhel orientujeme po směru hodinových ručiček: na každém obrázku je vyznačen úhel o velikosti $2\pi - \varphi$ orientovaný po směru hodinových ručiček, který bude mít v naší definici zápornou velikost rovnu $\varphi - 2\pi$.

Funkce sinus a kosinus definujeme jako zobrazení, která hodnotě $\varphi \in \mathbb{R}$ přiřadí jednu ze souřadnic průsečíku ramene úhlu s jednotkovou kružnicí, a

[12] Polohou myslíme, zda je strana přeponou, přilehlou odvěsnou či protilehlou odvěsnou.

[13] O důvodech zavedení radiánů se zmíníme později. S jinými jednotkami pracovat nebudeme.

[14] Je zvykem značit symbolem φ jak úhel (tedy část rovniny), tak jeho velikost (tedy číslo). Toto nerozlišování zpravidla nevede k nedorozumění. Přesto doporučujeme čtenáři při čtení následujícího odstavce brát tento rozdíl v úvahu.

sice

$$\sin : \varphi \mapsto y \qquad \cos : \varphi \mapsto x$$

Všimněte si na obrázku vlevo pravoúhlého trojúhelníku s vnitřním úhlem φ. Jeho přepona má velikost rovnu jedné a odvěsny mají velikost x, y. Definice pomocí jednotkové kružnice je tedy rozšířením trigonometrické definice z intervalu $(0, \pi/2)$ na $\mathbb{R}$.

9.4.3 Vlastnosti goniometrických funkcí

Jak budeme goniometrické funkce počítat? Budeme rýsovat a měřit? Zamysleli jste se někdy nad tím, jak počítá kalkulačka hodnoty goniometrických funkcí? A jak je počítali matematici v dobách před kalkulačkami?

Úkol. Načrtněte čtverec a rovnostranný trojúhelník a rozdělte ho přímkou procházenící jedním z vrcholů na dvě shodné části. Použijte Pythagorovu větu k výpočtu stran ve vašem obrázku a určete z obrázku hodnoty goniometrických funkcí.

Úkol. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník s přeponou o velikosti jedna (jednotku zvolte dle uvážení) a jeden z jeho ostrých úhlů označte α. Vyjádřete velikosti odvěsen pomocí úhlu α. Vyberte jednu s odvěsen a zvolte ji jako přeponu dalšího pravoúhlého trojúhelníku, který také načrtněte a velikost jednoho jeho ostrého úhlu označte β. Vyjádřete velikosti odvěsem pomocí úhlů α, β. Tuto úlohu použijeme v dodatku pro odvození součtových vzorců.

Předchozí úloha je základ odvození následujících součtových vzorců. Odvození najde čtenář v dodatku.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Úlohy. Odvoďte vzorce pro goniometrické funkce. Zároveň rozhodněte, které z nich platí pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ a které jen za určitých podmínek (získaných z definičního oboru). K odvození smíte použít jen geometrickou definici, případně vztahy z ní již odvozené.

1. $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$
2. $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$

3. $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

4. $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

5. $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

6. $\cos^2\varphi = 1/(\operatorname{tg}^2\varphi + 1)$

7. $\sin^2\varphi = 1/(\operatorname{cotg}^2\varphi + 1)$

8. $\sin^2\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi/(\operatorname{tg}^2\varphi + 1)$

9. $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$

10. $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

11. $|\cos(\varphi/2)| = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$

12. $|\sin(\varphi/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$

13. $|\operatorname{tg}(\varphi/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$

9.4.4 Sinus v okolí nuly a radiány

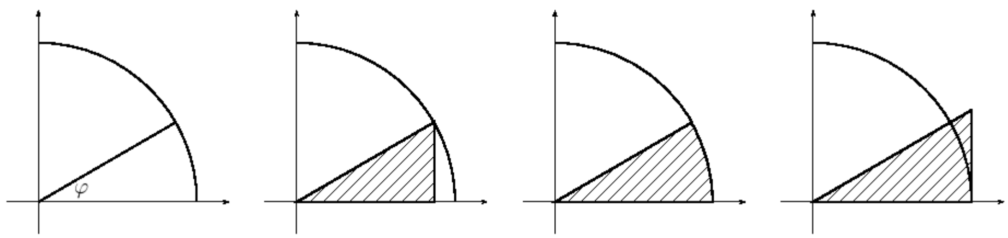
Odvodíme vztah mezi hodnotou velikosti úhlu a sinu tohoto úhlu pro malé úhly. Použijeme k tomu následující obrázek. Je na něm zobrazen úhel φ spolu s jednotkovou kružnicí a dále dva pravoúhlé trojúhelníky a jedna kruhová výseč.

Menší trojúhelník má odvěsny o velikosti $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ a obsah $P_1 = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi$.

Výseč má obsah $P_2 = \frac{1}{2}\varphi$.[15]

Větší trojúhelník má odvěsny o velikosti jedna a $\operatorname{tg}\varphi$ a obsah $P_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

[15]Obsah jednotkového kruhu je roven $O = \pi$. Obsah výseče je přímo úměrný velikosti úhlu výseče, tedy je roven $\frac{\varphi}{2\pi}O$, po pokrácení vyjde $\frac{1}{2}\varphi$.



Porovnáním obsahů (a pokrácením polovinou) odvodíme pro $\varphi \in (0, \pi/2)$ dvě nerovnosti

$$\sin\varphi\cos\varphi \ < \ \varphi \ < \ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Z každé nerovnosti vyjádříme podíl $\sin\varphi/\varphi$. Při úpravách si uvědomíme, že na uvedeném intervalu má $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ kladnou hodnotu a můžeme jimi tedy nerovnice dělit i násobit. Dostaneme

$$\cos\varphi \ < \ \frac{\sin\varphi}{\varphi} \ < \ \frac{1}{\cos\varphi}$$

Pro φ blížící se k nule zprava jsou limity výrazů vpravo i vlevo rovny jedné. Z policejní věty plyne

$$\lim_{\varphi\to 0^+}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$$

To lze interpretovat tak, že pro malé úhly se hodnota sinu úhlu přibližně rovná velikosti úhlu vyjádřené v radiánech.

Ještě rozebereme limitu zleva a oboustrannou limitu. Limitu v nule zleva můžeme substitucí $t = -\varphi$ převést na limitu zprava

$$\lim_{\varphi\to 0^-}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(-t)}{-t}$$

Víme, že sinus je lichá funkce, proto je podíl funkcí sudou

$$\frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t}$$

Dále platí

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

a tedy i

$$\lim_{\varphi\to 0^-}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$$

Protože se jednostranné limity rovnají, je

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1 \tag{9.12}$$

9.4.5 Funkcionální definice goniometrických funkcí

Funkce sinus a kosinus jsou v [2] zavedeny podobně jako exponenciální funkce pomocí funkcionální rovnice. Podobně jako u exponenciální funkce je vyslovena věta,[16] že existuje právě jedna dvojice funkcí splňující

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y))$
   $(\forall x, y \in \mathbb{R})(s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y))$

2. $\lim_{x \to 0} s(x)/x = 0$

Tato dvojice je pak nazvána sinem a kosinem a označena symboly sin, cos. Více viz [2], věta 6.6.3.

9.4.6 Derivace goniometrických funkcí

K odvození vzorců pro derivaci sinu a kosinu potřebujeme kromě součtových vzorců a limity (9.12) ještě hodnotu limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Vypočteme ji po úpravě

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2}\, x\, \frac{1}{1 + \cos x}$$

Víme, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} x = 1^2 \cdot 0 = 0$$

Dále z definice funkce kosinus na jednotkové pružnici víme, že pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ je $\cos x \in (0, 1]$. Odtud pro tato x plynou vztahy

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \cos x} < 1$$

[16] K větě je slibovám i důkaz, ale není úplně snadné jej v textu nalézt.

Z věty o limitě součinu funkce s nulovou limitou a omezené funkce dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{9.13}$$

Odvodíme nyní vzorce pro derivaci sinu a kosinu. Použijeme k tomu součtové vzorce a limity (9.12), (9.13).

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} = \cos x \qquad (9.14) \\
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\sin h}{h} = -\sin x \qquad (9.15)
\end{aligned}$$

9.4.7 Další goniometrické funkce

Funkce tangens a kotangens jsou definovány vztahy[17]

$$\mathrm{tg} = \frac{\sin}{\cos} \qquad \mathrm{cotg} = \frac{\cos}{\sin}$$

K odvození vzorců pro jejich derivace použijeme vzorec pro derivaci podílu a (9.14), (9.15).

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}' &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos \cos} = \frac{\cos \cos + \sin \sin}{\cos \cos} \\
\mathrm{cotg}' &= \left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{\cos' \sin - \cos \sin'}{\sin \sin} = \frac{-\sin \sin - \cos \cos}{\sin \sin}
\end{aligned}$$

Další úpravou dostaneme vzorce $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = 1+\mathrm{tg}^2\, x$, $(\mathrm{cotg}\, x)' = -1/\sin^2 x = -1 - \mathrm{cotg}^2\, x$.

9.4.8 Spojitost goniometrických funkcí

Z existence a konečnosti derivací plyne spojitost goniometrických funkcí na jejich definičních oborech.[18]

[17] Funkcím chybí argumenty a není to překlep, ale záměr. Symbol $\sin x$ značí funkční hodnotu, tedy číslo. Symbol sin značí funkci.

[18] Viz [2], věta 5.1.10.

9.4.9 Další limity

Odvodíme další limitu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Limitu zlomku $1/(1+\cos x)$ jsme spočítali dosazením.[19]

9.5 Cyklometrické funkce

Goniometrické funkce nejsou prosté, nemají tedy inverzní funkce. Přesto na kalkulačce naleznete tlačítka $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, které tyto inverzní funkce nahrazují.

Definice.
Arkussinem čísla a nazýváme $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ splňující $\sin x = a$. Značíme jej $x = \arcsin a$.
Arkuskosinem čísla a nazýváme $x \in [0, \pi]$ splňující $\cos x = a$. Značíme jej $x = \arccos a$.
Arkustangentou čísla a nazýváme $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ splňující $\operatorname{tg} x = a$. Značíme jej $x = \operatorname{arctg} a$.
Arkuskotangentou čísla a nazýváme $x \in (0, \pi)$ splňující $\operatorname{cotg} x = a$. Značíme jej $x = \operatorname{arccotg} a$.
Funkce *arkussinus, arkuskosinus, arkustangens, arkuskotangens* nazýváme *cyklometrickými funkcemi.*

Poznámky.

1. Z grafů goniometrických funkcí plyne, že uvedené rovnice mají nejvýše jeden kořen. Neprovinili jsme se tedy, když jsme v závěru definice mluvili o funkcích.

2. V případě sinu a kosinu mají rovnice kořen pro $a \in [-1, 1]$, v případě tangensu a kotangensu pro $a \in \mathbb{R}$. Odtud dostaneme definiční obory cyklometrických funkcí.

[19] Připomeňme, že dosazením počítáme limitu spojité funkce. Viz itvrzení 4.3.4 v [2].

3. Pozor na to, že u funkce arkuskotangens není shoda pro interval pro kořen rovnice. Nechte WolframAlpha vykreslit graf funkce arccotan[20] a porovnejte s naší definicí.

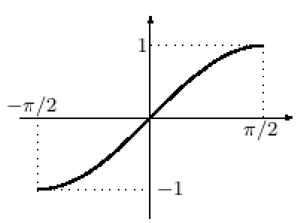
4. Pomocí pojmu zúžené funkce lze cyklometrické funkce definovat vztahy

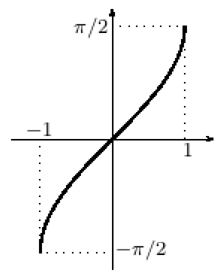
$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1} \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{arctg} = \left(\mathrm{tg}\,|_{(-\pi/2,\pi/2)}\right)^{-1} \qquad \mathrm{arccotg} = \left(\mathrm{cotg}\,|_{(0,\pi)}\right)^{-1}$$

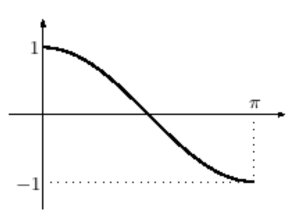
Funkci zužujeme na interval vyznačený za svislou čárou.

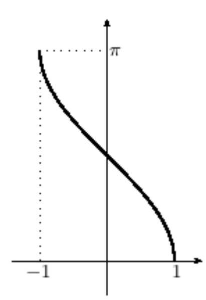
Na obrázku vlevo je graf zúžené funkce $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, vpravo je graf funkce k inverzní, tedy funkce arkussinus.





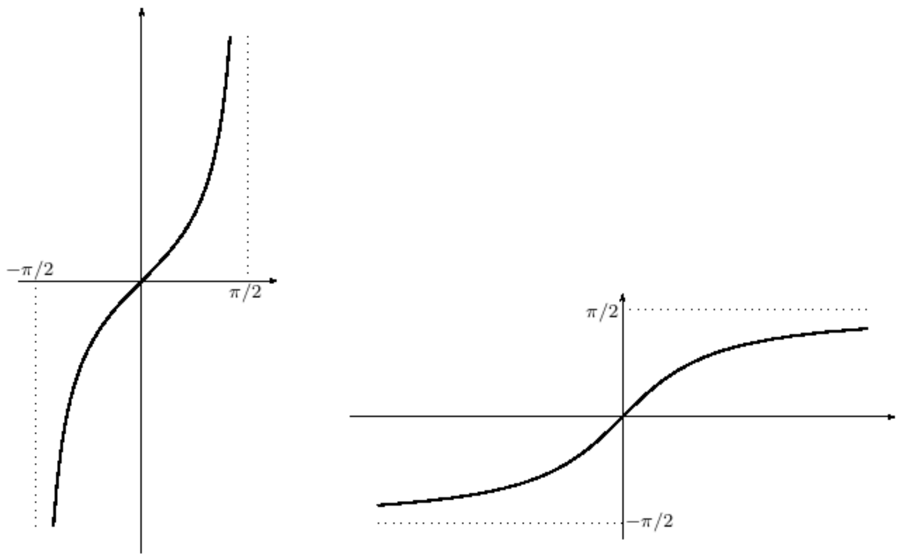
Obdobná dvojice grafů pro funkci kosinus,



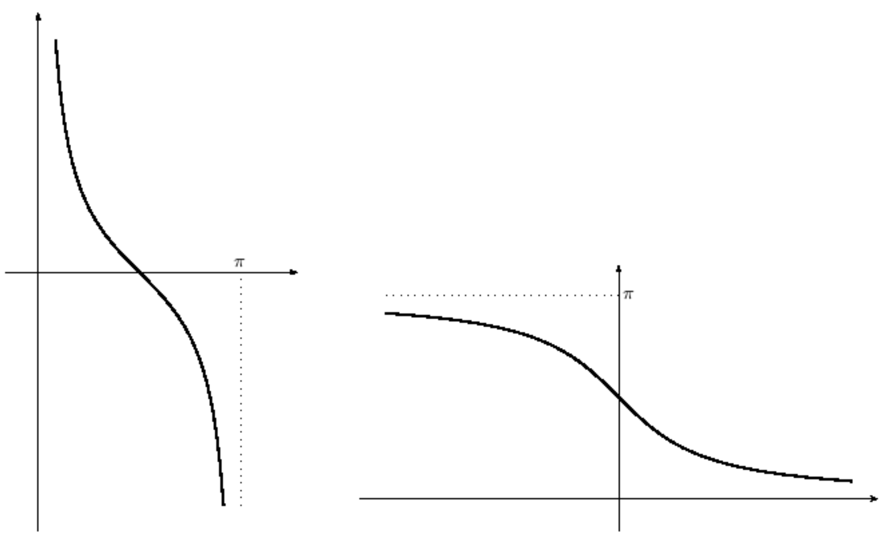


pro funkci tangens

[20] plot[arccotan(x)]



a pro funkci kotangens.



9.5.1 Derivace cyklometrických funkcí

Odvodíme vzorec pro derivaci arkussinu. Použijeme (9.11) pro $y = f(x) = \sin x$, $x = g(y) = \arcsin y$. Při odvození použijeme, že $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, tedy

$\cos x \geq 0$ a $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$.

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Úloha. Odvoďte obdobným způsobem vzorec

$$\arccos' y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Dále odvodíme vzorec pro derivaci arkustangenty. Ze dvou možných vzorců pro derivaci tangenty si vybereme: $\mathrm{tg}' x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$.

$$\mathrm{arctg}' y = \frac{1}{\mathrm{tg}' x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Úloha. Odvoďte obdobným způsobem vzorec

$$\mathrm{arccotg}' y = \frac{-1}{1+y^2}$$

Kapitola 10

L'Hospitalovo pravidlo

Některé limity je obtížné spočítat bez L'Hospitalova pravidla, například

$$\lim_{x\to+\infty} x\exp(-x) \qquad \lim_{x\to 0^+} x\log x$$

První výraz upravíme na zlomek $x/\exp x$ a dostaneme limitu typu „∞/∞“, která nám dovoluje použít L'Hospitalovo pravidlo – zderivujeme čitatele i jmenovatele, dostaneme zlomek $1/\exp x$, který má pro $x \to +\infty$ limitu rovnu nule. L'Hospitalovo pravidlo pak říká, že i původní limita je rovna nule.

Druhý výraz upravíme na zlomek $\log x/x^{-1}$ a opět dostaneme limitu typu „∞/∞“ a použijeme L'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme zlomek $(1/x)/(-x^{-2})$ a po úpravě výraz $-x$, který má pro $x \to 0^+$ limitu rovnu nule, a tedy i původní limita je rovna nule.

Formulaci L'Hospitalova pravidla a jeho důkaz najdete v [2] pod číslem 5.2.28.

Úlohy. Vypočtěte následující limity. Na mnohé se hodí použití L'Hospitalova pravidla, ale ne na všechny. Vždy před použitím L'Hospitalova pravidla ověřte jeho předpoklady.

Návod. Součin upravte na podíl jako výše. Mocniny s proměnným základem i exponentem upravte $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log f(x))$ a počítejte limitu vnitřní funkce (exponentu). Rozdíl zlomků převeďte na společného jmenovatele.

1. $\lim_{x\to\pi/2}(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg} x$
2. $\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$

3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
5. $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/2}\log x$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$
7. $\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{x}\,\log x$
8. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$
9. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$
10. $\lim_{x\to 0^+} x\,\log\operatorname{tg} x$
11. $\lim_{x\to \pi/2^-} x\,\log\operatorname{tg} x$
12. $\lim_{x\to -\infty} x\,\log\operatorname{arctg} 2^x$

Kapitola 11

Konvexní funkce

TODO:
KONVEXNÍ ČTYŘÚHELNÍK.
KONVEXNÍ MNOŽINA.
KONVEXNÍ FUNKCE – NADGRAF JE KONVEXNÍ MNOŽINA.
DEFINICE KONVEXNÍ FUNKCE POMOCÍ SEČNY

Příklady konvexních funkcí. TODO: GRAFY

1. $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}$

2. $x \mapsto \begin{cases} x^2 - x & x \in (0,1) \\ 1 & x \in \{0,\ 1\} \end{cases}$

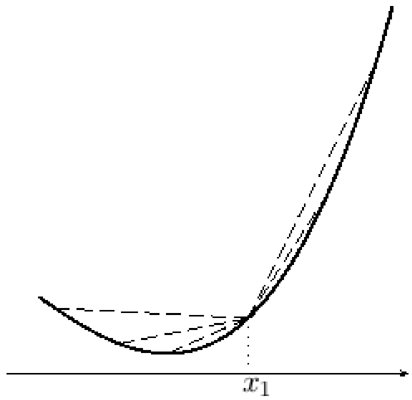
3. $x \mapsto \begin{cases} x^2 - x & x \leq 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$

11.1 Jednostranné derivace konvexních funkcí

Lemma. Nechť je funkce f konvexní na intervalu (a,b). Pak má funkce f na intervalu (a,b) konečné jednostranné derivace a pro $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ platí

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \tag{11.1}$$

DŮKAZ. Uvažujme funkci f konvexní na intervalu $I = (a,b)$, bod $x_1 \in I$.

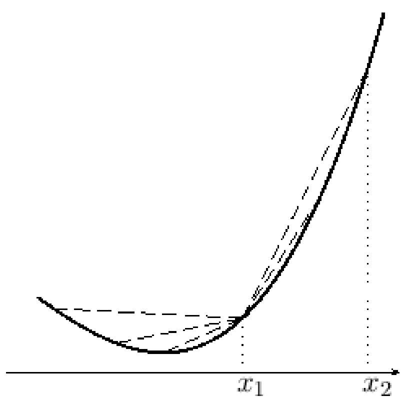


Funkce g popisující směrnice sečen grafu funkce f s jedním krajním bodem $[x_1, f(x_1)]$ je neklesající.

$$g : h \mapsto \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, h \in (a - x_1, b - x_1)$$

Odtud plyne existence jednostranných limit funkce g v bodě $h = 0$, a tedy jednostranných derivací $f'_+(x_1)$, $f'_-(x_1)$ a nerovnost

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$$



Pro neklesající funkci g a $h_0 > 0$ platí

$$\lim_{h \to 0^+} g(h) \leq g(h_0)$$

Dosazením $h_0 = x_2 - x_1$ dostaneme

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a odtud dále $f'_+(x_1) < +\infty$.

Obdobnými úvahami dostaneme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

a odtud $f'_-(x_2) > -\infty$. Z výše uvedeného pak dostaneme nerovnost

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$$

a vzhledem k tomu, že bod $x \in (a, b)$ můžeme zvolit v roli bodu x_1 i bodu x_2, dostáváme nerovnosti

$$-\infty < f'_-(x) \leq f'_+(x) < +\infty$$

a z nich konečnost jednostranných derivací. □

Lemma. Je-li funkce f konvexní na otevřeném intervalu, pak jsou její jednostranné derivace na tomto intervalu neklesající.

DŮKAZ. Z nerovností (11.1) plyne, že f'_- je neklesající funkce. Pro x_2 platí v (11.1) stejná nerovnost jako pro x_1, dostáváme tedy

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$$

a odtud plyne, že i f'_+ je neklesající funkce. □

11.2 Spojitost konvexní funkce

Věta. Funkce konvexní na otevřeném intervalu je na tomto intervalu spojitá.

DŮKAZ. Z konečnosti jednostranných derivací plyne jednostranná spojitost a z jednostranných spojitostí plyne spojitost. □

Ve větě je podstatné, že interval je otevřený – viz výše uvedený příklad funkce konvexní a nespojité na uzavřeném intervalu. Z tohoto důvodu se v některé literatuře uvažují konvexní funkce pouze na otevřených intervalech.

11.3 První derivace konvexní funkce

Věta. Má-li funkce f na otevřeném intervalu I derivaci, pak je na I konvexní právě když je f' neklesající na I.

DŮKAZ. Implikace: je-li f konvexní na I, pak má na I neklesající derivaci f' plyne z lemmat v článku 11.1.

Dokažme opačnou implikaci: je-li derivace f' neklesající na I, pak je f konvexní na I. Zvolme $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Z Lagrangeovy věty plyne existence $x_{12} \in (x_1, x_2)$, $x_{23} \in (x_2, x_3)$ splňujících

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_{12}) \qquad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x_{23})$$

Derivace f' je neklesající na I a $x_{12} < x_{23}$. Odtud plyne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

a odtud plyne, že je f konvexní na I.

11.4 Druhá derivace konvexní funkce

Věta. Má-li funkce f na otevřeném intervalu I druhou derivaci, pak je na I konvexní právě když je f'' nezáporná na I.

DŮKAZ. Důkaz plyne z předchozí věty a z věty o neklesající funkci a znaménku derivace z článku 8.6. $\square$

11.5 Konkávní funkce

Definice. Funkci f nazveme *konkávní na intervalu* I, pokud je $-f$ konvexní na I.

Přímo z definice plyne platnost vět:

Věta. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu I derivaci. Pak je f na I konkávní právě když je f' na I nerostoucí.

Věta. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu I druhou derivaci. Pak je f na I konkávní právě když je f'' na I nekladná.

11.6 Inflexní body

TODO

11.7 Řešené příklady

Na příkladech ukážeme použití vět z předchozích článků.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}\exp(x)$, $x \geq 0$
   Spočítáme první derivaci a upravíme do tvaru šikovného pro další derivování
   $$f'(x) = (x^{-1/2}/2 + x^{1/2})\exp(x)$$
   Druhá derivace po úpravě vyjde
   $$f''(x) = (-x^{-3/2}/4 + x^{-1/2} + x^{1/2})\exp(x)$$
   vytkneme $x^{-3/2}$
   $$f''(x) = x^{-3/2}(-1/4 + x + x^2)\exp(x)$$

V bodě $x = 0$ má f nevlastní první a druhou derivaci zprava. V bodech $x > 0$ je $x^{-3/2} > 0$, $\exp(x) > 0$, záleží tedy na znaménku výrazu $-1/4 + x + x^2$. Vyřešením kvadratické nerovnice dostaneme

$$\begin{array}{lcl} f''(x) & > & 0 \quad \text{pro } x > (\sqrt{2}-1)/2 \\ f''(x) & = & 0 \quad \text{pro } x = (\sqrt{2}-1)/2 \\ f''(x) & < & 0 \quad \text{pro } x \in (0, (\sqrt{2}-1)/2) \end{array}$$

Z věty o znaménku druhé derivace pak plyne, že je f konvexní na intervalu $[(\sqrt{2}-1)/2, +\infty)$ a konkávní na intervalu $(0, (\sqrt{2}-1)/2]$. V bodě $x = (\sqrt{2}-1)/2$ má f inflexní bod.

Pomocí věty nelze rozhodnout, zda je funkce f konkávní na intervalu $[0, (\sqrt{2}-1)/2]$ (tedy včetně bodu nula). Načrtněte graf a rozmyslete si, že ze spojitosti plyne odpověď ano.

2. $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$
Spočítáme první derivaci a upravíme do tvaru vhodného pro další derivování

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}(2x-1)(x^2-x+1)^{-2/3}$$

Spočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = \tfrac{2}{3}(x^2-x+1)^{-2/3} - \tfrac{2}{9}(2x-1)^2(x^2-x+1)^{-5/3}$$

a vytkneme $\frac{2}{9}(x^2-x+1)^{-5/3}$

$$f''(x) = \tfrac{2}{9}(x^2-x+1)^{-5/3}[3(x^2-x+1) - (2x-1)^2]$$

Upravíme výraz v hranaté závorce

$$f''(x) = \tfrac{2}{9}(x^2-x+1)^{-5/3}[-x^2+x+4]$$

Výraz před hranatou závorkou nabývá kladných hodnot, proto znaménko druhé derivace určíme řešením kvadratické nerovnice. Označíme-li kořeny rovnice $x_1 = (1-\sqrt{17})/2$, $x_2 = (1+\sqrt{17})/2$, je

$$\begin{array}{lcl} f''(x) & > & 0 \quad \text{pro } x \in (x_1, x_2) \\ f''(x) & = & 0 \quad \text{pro } x \in \{x_1, x_2\} \\ f''(x) & < & 0 \quad \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \end{array}$$

Z věty o znaménku druhé derivace pak plyne, že je f konvexní na intervalu $[x_1, x_2]$, konkávní na intervalech $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ a v bodech x_1, x_2 má inflexní body.

3. $f : x \mapsto \exp(\operatorname{tg} x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
Pro výpočet derivací použijeme vzorec $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg}^2 x + 1)\exp(\operatorname{tg} x) \\ f''(x) &= 2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\exp(\operatorname{tg} x) + (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2\exp(\operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

Druhou derivaci upravíme – vytkneme $(\operatorname{tg}^2 x + 1)\exp(\operatorname{tg} x)$

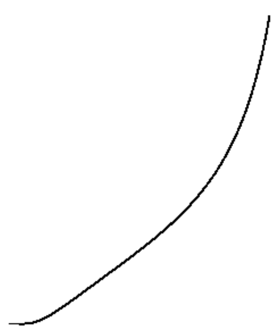
$$f''(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\exp(\operatorname{tg} x)[2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1]$$

a hranatou závorku upravíme na kvadrát dvojčlenu

$$f''(x) = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\exp(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x + 1)^2$$

Z vlastností druhé mocniny a exponenciální funkce plyne nezápornost funkce f'' na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Funkce f je tedy na tomto intervalu konvexní.

V bodě $-\pi/4$ je $f''(-\pi/4) = 0$, ale v obou jeho okolích je f konvexní. Proto bod $-\pi/4$ není podle námi přijaté definice inflexním bodem.



Vlevo je graf funkce f na intervalu $[-1.57, 0.8]$, na grafu nejsou osy.
Nulová druhá derivace v bodě $-\pi/4$ se projeví téměř lineárním průběhem funkce f v jeho okolí – graf se hodně podobá úsečce.
Snadno spočítáme, že v tomto bodě je nulová i třetí derivace. Taylorův polynom třetího stupně je tedy ve skutečnosti lineární funkce $T(x) = (2/e)(x + \pi/4) + 1/e$.

Dalším zajímavým bodem je $-\pi/2$. Funkce f v něm není definovaná, ale můžeme ji do něj spojitě rozšířit nulou. Dá se spočítat, že toto spojité rozšíření má v tomto bodě nulovou nejen první a druhou jednostrannou derivaci, ale i jednostranné derivace všech vyšších řádů.

Kapitola 12

Řady

Řada je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Navíc se v jiných oborech používá pojem *časová řada* ve smyslu posloupnosti. Studentům se tyto pojmy hodně pletou, přestože se už na střední škole setkali s pojmy *geometrická posloupnost*, *geometrická řada*, *aritmetická posloupnost*, *aritmetická řada*. Proto je potřeba si „vtlouci“ do hlavy, že geometrická posloupnost je například $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ zatímco geometrická řada je například $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$, tedy součet.

Uvedeme tři varovné příklady, které nás poučí, že s nekonečnými součty musíme zacházet opatrně.

Uvažujme řadu

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{12.1}$$

a vydělme ji člen po členu dvěma

$$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots . \tag{12.2}$$

Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne (odečteme (12.2) od (12.1))

$$\frac{s_1}{2} = s_1 - \frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots . \tag{12.3}$$

A odtud dostaneme odečtením řady (12.2) od řady (12.3)

$$0 = \frac{s_1}{2} - \frac{s_1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ,$$

a tedy součet kladných čísel je roven nule.

Uvažujme řadu

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s_2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s_2}{2} = s_2 + \frac{s_2}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy a přidanými nulami. Proto platí $s_2 = \frac{3s_2}{2}$.

Uvažujme geometrickou řadu

$$s_3 = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$

a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s_3}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$

Vidíme, že platí $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$, odkud dostaneme $s_3 = -7$.

12.1 Základní pojmy

Definice. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme (nekonečnou číselnou) *řadou.*
Čísla a_k nazýváme *členy* řady.
Číslo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazýváme *n-tým částečným součtem* řady a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupností částečných součtů* řady.
Má-li posloupnost částečných součtů limitu $s \in \mathbb{R}^*$, pak říkáme, že má řada součet a s nazýváme *součtem řady.*
Pokud je součet řady konečný, říkáme, že řada *konverguje.*
Pokud je součet řady nekonečný, říkáme, že řada *diverguje.*

V případě, že řada součet nemá, není terminologie úplně jednotná – proto raději budeme říkat, že nemá součet. Někteří používají termín oscilující řada, někteří divergentní řada.

Poznámky.

1. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ značí jednak řadu (i když nemá součet) a také její součet (má-li ho).

2. Řada může začínat i jiným indexem než $k = 1$. Například geometrickou řadu $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ zapíšeme $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

3. Změníme-li *konečný* počet členů řady, pak se pravděpodobně změní její součet, ale nezmění se to, zda řada konverguje a zda má součet: Je-li $a_k = b_k$ pro $k \geq N$, pak pro $n \geq N$ je (podrobnosti v následujícím cvičení)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$
a odtud $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Proto při zkoumání konvergence řady nemusíme psát meze pro sčítací index k a nevadí nám, že například členy řady $\sum \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$ nejsou pro $k \in \{0, 1, 2\}$ definovány.

CVIČENÍ. Ukažte, že pro řady $\sum a_k$, $\sum b_k$, které mají od indexu $k = N$ stejné členy, tedy pro $k \geq N$ je $a_k = b_k$, platí pro $n \geq N$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

NÁVOD. Pro obě řady platí
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k$$
a dále platí
$$\sum_{k=N+1}^{n} a_k = \sum_{k=N+1}^{n} b_k$$

Příklady.

1. *Geometrická* řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ má pro $q \neq 1$ částečný součet $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (pro $q = 1$ je $s_n = n+1$) a je konvergentní pro $q \in (-1,1)$ se součtem $s = \frac{1}{1-q}$. Pro $q \geq 1$ má součet $s = +\infty$, tedy diverguje. Pro $q \leq -1$ nemá součet.

2. *Harmonická* řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ má rostoucí posloupnost částečných součtů, proto má součet. Odhady $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ... dají $s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > 1 + \frac{n}{2}$ a odtud plyne, že součet harmonické řady je $+\infty$.

3. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$ má částečné součty $s_{2n} = -1+2-3+4-\cdots+2n = n$, $s_{2n+1} = s_{2n} - (2n+1) = -n-1$, a tedy nemá součet.

4. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ má částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ a součet 1.

U řady v příkladu 3 lze zjistit, že nekonverguje už z toho, jak vypadají její členy s velkými indexy – nesplňují podmínku v následujícím lemmatu. Má-li mít řada konečný součet, musí mít posloupnost jejích členů nulovou limitu:

Lemma – nutná podmínka konvergence. Je-li řada $\sum a_k$ konvergentní, má posloupnost jejích členů nulovou limitu: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz. Ze vztahu $s_n = s_{n-1} + a_n$ vyjádříme $a_n = s_n - s_{n-1}$ a z konvergence řady plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$ – obě limity jsou rovny součtu řady. □

Poznámka. Říkáme, že podmínka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ je nutná podmínka konvergence řady. Z její neplatnosti plyne, že řada není konvergentní – například geometrická řada s kvocientem $q \notin (-1,1)$ nebo řada z příkladu 3. Z její platnosti neplyne nic – například harmonická řada tuto podmínku splňuje, ale není konvergentní.

12.2 Základní pravidla manipulací s řadami

V příkladech na začátku kapitoly byly jediné chybné úvahy v počítání s nekonečny. V prvním příkladu neplatí $s_1 - s_1/2 = s_1/2$ ani $s_1/2 - s_1/2 = 0$, protože $s_1 = +\infty$.

V druhém příkladu jsou kupodivu všechny úpravy korektní kromě závěru. Součet řady se skutečně při přerovnání členů může změnit – blíže tento jev budeme zkoumat v článku o přerovnání řad.

Ve třetím příkladu je vše v pořádku až k rovnici $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$. Při jejím řešení jsme udělali chybu v úpravě $s_3 - \frac{8s_3}{7} = -\frac{s_3}{7}$, protože $s_3 = +\infty$.

Ukážeme, že všechny ostatní úpravy jsou v pořádku.

Lemma o sčítání řady člen po členu a násobení řady člen po členu. Mají-li řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ součty a, b, a je-li definován součet $a+b$, pak řada, která je jejich součtem člen po členu $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ má součet $a+b$. Je-li definován součin ca, pak má řada $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ součet ca.

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o limitě součtu:
$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$
a z věty o limitě součinu: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. □

Poznámky.

1. Pro konvergentní řady je součet $a+b$ a součin ca definován.

2. Terminologie „člen po členu“ se používá spíše v případech, kdy tvrzení podobné tomu v lemmatu neplatí. Například u řad funkcí nemusí být limita součtu rovna součtu limit – pro $s_n(x) = \sin^{2n}(\frac{\pi x}{2})$ je $\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} s_n(x) = 1$. Podobně nemusí platit $\sum_{k=1}^{\infty} f'(x) = (\sum_{k=1}^{\infty} f(x))'$. O řadě $\sum_{k=1}^{\infty} f'(x)$ říkáme, že vznikla derivací řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(x)$ člen po členu.

3. Vkládání nul do řad odpovídá vkládání stejných členů do posloupnosti částečných součtů. Má-li například řada $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_3, \ldots$, pak má řada $a_1 + a_2 + 0 + a_3 + \cdots$ posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_2, s_3, \ldots$. Limita posloupnosti částečných součtů se tím nezmění, proto se ani součet řady vložením nul nezmění.

12.3 Řady s nezápornými členy

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s nezápornými členy $a_k \geq 0$ má neklasající posloupnost částečných součtů a proto má vždy součet. Ten může být buď konečný, nebo je roven $+\infty$.

Uvedeme několik kritérií, která nám pomohou určit, zda má řada konečný součet. Ve všech tvrzeních předpokládáme, že členy řad jsou nezáporné.

Věta – srovnávací kritérium konvergence řad.
Platí-li $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq b_k)$, pak platí

1. Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentní, pak konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
2. Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, pak je i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$.

Důkaz. Z $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq b_k)$ plynou stejné nerovnosti pro částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$: $(\forall n \in \mathbb{N})(s_n \leq r_n)$ a odtud limitním přechodem plyne $\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} r_n$, a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, odkud plynou obě tvrzení věty. □

Příklad. Ukážeme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverguje. Nabízí se srovnání s řadou $\sum \frac{1}{k(k+1)}$, o které jsme ukázali v článku 12.1, že konverguje. Nerovnost $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^2+k}$ nám nepomůže, potřebujeme opačnou nerovnost. Proto řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ „posuneme“ o jeden člen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ a použijeme nerovnost $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$.

Věta – limitní srovnávací kritérium konvergence řad.
Platí-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$ a řada $\sum b_k$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum a_k$.
Platí-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} > 0$ a řada $\sum a_k$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum b_k$.

Důkaz. V definici limity posloupnosti $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ zvolíme $\varepsilon = 1$ – k němu existuje K takové, že pro $k > K$ platí $\frac{a_k}{b_k} < L + 1$. Po úpravě dostaneme $a_k < (L+1)b_k$.
Z konvergence řady $\sum b_k$ plyne konvergence řady $\sum (L+1)b_k$ a ze srovnávacího kritéria plyne konvergence řady $\sum a_k$. Použili jsme poznámku z článku 12.1, že se nezmění konvergence řady při změně konečného počtu jejích členů – nevadí nám tedy, že $a_k < (L+1)b_k$ platí až od indexu K.
Druhé tvrzení dostaneme z prvního použitím věty o limitě podílu $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = 1/\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$. □

Důsledek. Pokud je $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k \in (0, +\infty)$ – tedy nenulová a konečná – pak řada $\sum a_k$ konverguje právě když konverguje řada $\sum b_k$.

Příklady.

1. Řada $\sum \frac{3k}{k^3+k+1}$ konverguje, protože $\frac{3k}{k^3+k+1} / \frac{1}{k^2} = \frac{3k^3}{k^3+k+1} \to 3$ pro $k \to \infty$ a řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje.

2. Řada $\sum \frac{1}{k^3+1}$ konverguje protože $\frac{k^2}{k^3+1} \to 0$ pro $k \to \infty$ a řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje.

3. Řada $\sum \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}$ diverguje protože $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}} / \frac{1}{k} = \frac{k}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}} \to +\infty$ pro $k \to \infty$ a řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje.

Další dvě věty používají srovnávací kritérium s geometrickou řadou. K jejich důkazu použijeme následující cvičení.

Úkol. Ukažte, že z $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k \le q)$ plyne $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \le a_1 q^{k-1})$.

Věta – podílové kritérium konvergence řad. Pokud existuje $q \in (0,1)$ takové, že $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k \le q)$, tak řada $\sum a_k$ konverguje.

Důkaz. Tvrzení plyne z konvergence geometrické řady $\sum a_1 q^{k-1}$ a srovnávacího kritéria. □

Častěji budeme používat limitní verzi podílového kritéria.

Věta – limitní podílové kritérium konvergence řad.
Pokud je $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, tak řada $\sum a_k$ konverguje.
Pokud je $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, tak řada $\sum a_k$ diverguje.

Důkaz. Z $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L < 1$ plyne pro $q = (L+1)/2 < 1$ existence K takového, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k > K$ platí $a_{k+1}/a_k < q$ a odtud plyne tvrzení věty z podílového kritéria.

Z $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L > 1$ plyne existence K takového, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k > K$ platí $a_{k+1}/a_k > 1$ (zvolili jsme $\varepsilon = L - 1 > 0$, pak je $L - \varepsilon = 1$), tedy posloupnost $\{a_k\}_{k=K}^{\infty}$ je rostoucí, a tedy $(\forall k > K)(a_k > a_K)$ a odtud $\lim_{k\to\infty} a_k > a_K$. Zároveň pro dostatečně velké K je $a_K \ne 0$ (jinak by nebyl definován podíl a_{K+1}/a_K a nemohla by existovat limita a_{k+1}/a_k pro $k \to \infty$).

Odtud plyne, že neplatí nutná podmínka konvergence $\lim a_k = 0$, a tedy řada $\sum a_k$ diverguje. □

Příklady.

1. Řada $\sum \frac{k^2}{1.1^k}$ konverguje, protože $\frac{(k+1)^2}{1.1^{k+1}} / \frac{k^2}{1.1^k} = \frac{(k+1)^2}{1.1k^2} \to 1/1.1 < 1$ pro $k \to \infty$.

2. Vyjde-li limita rovna jedné, tak z této skutečnosti neplyne nic. Například řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje a řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje a pro obě je limita a_{k+1}/a_k rovna jedné.

12.4 Absolutní konvergence řad

Definice. Řadu $\sum a_k$ nazveme *absolutně konvergentní*, pokud je konvergentní řada $\sum |a_k|$.

Pro zkoumání absolutní konvergence použijeme kritéria konvergence řad s nezápornými členy.

Věta. Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, je řada $\sum a_k$ absolutně konvergentní.

Důkaz plyne přímo z limitního srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy. $\square$

Věta. Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak řada $\sum a_k$ není konvergentní.

Důkaz je podobný, jako v případě limitního podílového kritéria pro řady s nezápornými členy. Z $|a_k| > |a_K| > 0$ také plyne, že není splněna nutná podmínka konvergence $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. $\square$

Ukážeme, že z absolutní konvergence řady plyne její konvergence.

Věta. Je-li řada $\sum a_k$ absolutně konvergentní, je i konvergentní.

Důkaz. Ukážeme, že je posloupnost částečných součtů $\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\}_{n=1}^\infty$ Cauchyovská – odtud plyne, že je konvergentní.
Zopakujme si definici: posloupnost $\{s_n\}$ je Cauchyovská, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro $n > m > N$ platí

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^n a_k\right| < \varepsilon.$$

O posloupnosti $\{\sum_{k=1}^n |a_k|\}_{n=1}^\infty$ předpokládáme, že je konvergentní, tedy i Cauchyovská. Proto platí

$$\left|\sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_k|\right| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

pak plyne $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ a odtud plyne dokazované tvrzení. $\square$

Z věty plyne: zjistíme-li, že je řada absolutně konvergentní, pak víme, že je konvergentní. A zjistitíme-li, že není konvergentní, pak nemůže být ani absolutně konvergentní. Odtud a z kritérií konvergence máme následující důsledek.

Důsledek.
Je-li $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, je řada $\sum a_k$ nejen absolutně konvergentní, ale i konvergentní.

O řadě, která konverguje, ale nekonverguje absolutně, mluvíme někdy jako o neabsolutně konvergentní řadě.

12.5 Řady se střídavými znaménky

O řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ víme, že není absolutně konvergentní. Ukážeme, že je konvergentní.

Cvičení. Načrtněte graf posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Přemýšlejte přitom o vztahu hodnot (která je větší) s_n a s_{n+1} a podobně o vztahu hodnot s_n a s_{n+2}.

Rozmyslete si:

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{2n-1} > s_{2n} < s_{2n+1}$.
2. Vybraná posloupnost se sudými indexy $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a shora omezená členem s_1.
3. Vybraná posloupnost s lichými indexy $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a zdola omezená nulou.
4. Rozdíl $s_{2n} - s_{2n-1}$ se blíží k nule pro $n \to \infty$.
5. Z předchozího plyne, že obě vybrané posloupnosti konvergují a jejich limity si jsou rovny.

6. Obě limity jsou rovny i limitě částečných součtů $\{s_n\}$.

7. Pro $n \in \mathbb{N}$ a součet s řady platí $s_{2n} < s < s_{2n+1}$.

Uvedené úvahy lze zobecnit v následující větě.

Věta - Leibnizovo kritérium konvergence pro řady se střídavými znaménky. Nechť je $\{a_k\}$ nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum(-1)^{k+1}a_k$ konverguje právě když splňuje nutnou podmínku konvergence $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. V případě konvergence řady máme pro její součet s a libovolné $n \in \mathbb{N}$ odhad $s \in (s_{2n}, s_{2n+1})$.

Hlavní myšlenky důkazu. Ekvivalenci dokazujeme jako dvě implikace.
Jedna z implikací je zřejmá: je-li řada konvergentní, pak splňuje nutnou podmínku konvergence.
Důkaz opačné implikace je obdobný předchozím cvičením. Ukáže se, že za uvedených předpokladů mají posloupnosti $\{s_{2n}\}$, $\{s_{2n-1}\}$ limitu a ta je rovna limitě posloupnosti $\{s_n\}$. □

12.6 Přerovnání řad

V úvodu kapitoly jsme z řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

dostali úpravami řadu (zde z ní vypouštíme nulové členy)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

se stejnými členy, ale v jiném pořadí.

Budeme říkat, že druhá řada vznikla z první přerovnáním – níže uvádíme definici.

Definice. Nechť $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel, která každé přirozené číslo obsahuje právě jednou (posloupnost indexů přerovnané řady). O řadě $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ řekneme, že je *přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Příklad. Výše uvedené přerovnání odpovídá posloupnosti $1, 3, 2, 5, 7, 4, \ldots$.

Pro posloupnost $2, 1, 4, 3, 6, \ldots$ dostaneme z řady $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots$ přerovnáním řadu $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + \cdots$.

Obecně se při přerovnání řady může změnit její součet, nebo dokonce přerovnaná řada nemusí mít součet. V následujících článcích rozebereme, jak tato vlastnost souvisí s absolutní konvergencí řady.

12.6.1 Přerovnání absolutně konvergentní řady

Nejdříve ukážeme, že řada s nezápornými členy nezmění svůj součet při přerovnání. Poté totéž ukážeme pro absolutně konvergentní řadu.

Lemma o přerovnání řady s nezápornými členy. Nechť je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní řada s nezápornými členy a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je jejím přerovnáním. Pak je i přerovnaná řada konvergentní a řady mají stejný součet.

Důkaz. Ukážeme, že pro $n \to \infty$ se rozdíl n-tých částečných součtů obou řad blíží nule. Odtud plyne, že jejich limita je stejná, a to znamená, že mají řady stejný součet.

Označíme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Budeme pracovat s rozdílem $s_n - t_n$ a vztahy vysvětlíme nejdříve na příkladu přerovnané řady $a_3+a_8+a_1+a_2+a_7+\cdots$ – v tomto případě je $|s_5-t_5| = |a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-(a_3+a_8+a_1+a_2+a_7)| = |a_4+a_5-a_7-a_8| \le a_4+a_5+a_7+a_8 \le a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 = s_8-s_3$.

Protože je řada $\sum a_k$ konvergentní, je posloupnost jejích částečných součtů Cauchyovská, a proto k $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n, m > n_0$ platí $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

K tomuto n_0 zvolíme n_1 takové, že členy $a_1, \ldots, a_{n_0}$ jsou zahrnuty v přerovnané řadě $b_1, \ldots, b_{n_1}$. Pro rozdíl $s_{n_1} - t_{n_1}$ pak platí $|s_{n_1} - t_{n_1}| \le s_m - s_{n_0}$ pro dostatečně velké m. Odtud plyne $|s_{n_1} - t_{n_1}| < \varepsilon$.

Protože můžeme ε zvolit libovolně malé, je rozdíl $|s_n - t_n|$ pro dostatečně velké indexy libovolně malý, a proto jsou součty obou řad stejné. $\square$

Před důkazem věty o přerovnání absolutně konvergentní řady zavedeme značení: a^+ pro kladnou část čísla a, a^- pro zápornou část čísla a. Například $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $-3^+ = 0$, $-3^- = 3$. Obecně pro $a \ge 0$ je $a^+ = a$, $a^- = 0$ a pro $a < 0$ je $a^+ = 0$, $a^- = -a$. V dalším budeme používat vztahy $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a z nich odvozené vztahy $a^+ = (a + |a|)/2$, $a^- = (a - |a|)/2$.

Věta o přerovnání absolutně konvergentní řady. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní řada a řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ je jejím přerovnáním. Pak je i přerovnaná řada absolutně konvergentní a řady mají stejný součet.

Důkaz. Nechť je $\sum a_k$ absolutně konvergentní řada. Uvažujme řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$. Z konvergence řad $\sum |a_k|$, $\sum a_k$ plyne konvergence řad s nezápornými členy

$$\sum a_k^+ = \sum (a_k + |a_k|)/2 \qquad \sum a_k^- = \sum (a_k - |a_k|)/2.$$

Přerovnejme podle posloupnosti indexů $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ obě řady – dostaneme řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^+$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^-$ – mají stejný součet jako před přerovnáním. Z nich pak dostaneme přerovnanou řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^-$$

se součtem stejným jako řada $\sum a_k$. □

Poznámka o součinu řad. Součin řad $s = (\sum a_k)(\sum b_k)$ se nabízí napsat jako dvojnou sumu $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l$ (pro konečné řady ji získáme roznásobením – distributivním zákonem). Je otázka, zda má tato „dvojná“ řada součet a zda je roven součinu s. Odpověď zní ano pro absolutně konvergentní řady a součin často zapisujeme v tzv. *Cauchyově tvaru* $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

12.6.2 Přerovnání neabsolutně konvergentní řady

V případě neabsolutně konvergentní řady se přerovnáním může její součet změnit, nebo můžeme dostat řadu, která součet nemá. V následující větě ukážeme, že dokonce součet může nabývat jakékoliv hodnoty.

Věta. Nechť $\sum a_k$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak pro libovolné $S \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání řady $\sum a_k$ na řadu se součtem S.

Hlavní myšlenky důkazu. Použijeme značení a^+, a^- z článku o přerovnání absolutně konvergentní řady. Obě řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ mají limitu $+\infty$. Je-li S konečné kladné, začneme s kladnými členy řady, dokud nebude částečný součet větší než S. Je-li S konečné záporné, začneme se zápornými členy řady, dokud nebude částečný součet menší než S. Pak budeme vždy brát střídavě potřebné množství kladných/záporných členů, abychom se s částečným součtem dostali nad/pod S (řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ mají nekonečný součet, proto nám slouží jako hrneček v pohádce hrnečku vař). Zbývá ukázat, že takto sestrojená řada má součet a ten je roven S.

Je-li $S = +\infty$, budeme postupovat podobně – budeme se postupně dostávat nad 1, pod 1, nad 2, pod 2, …, nad k, pod k, ….

Podobně pro $S = -\infty$. □

12.7 Eulerovo číslo

Ukážeme, že základ přirozených logaritmů, Eulerovo číslo e, je roven součtu řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ a limitě $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

12.7.1 Eulerovo číslo jako součet řady

Použijeme Taylorův polynom exponenciální funkce $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$. Pro $x = 1$ dostáváme $T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ a pomocí Lagrangeova zbytku Taylorova polynomu

$$e = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} + \tfrac{1}{(n+1)!}\exp(c_n)$$

O čísle c_n víme $c_n \in (0,1)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\exp(c_n) = 0$ a odtud

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tag{12.4}$$

12.7.2 Eulerovo číslo jako limita posloupnosti

Ukážeme obě nerovnosti $(1+\frac{1}{n})^n \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $(1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Odtud pak plyne

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \tag{12.5}$$

Úloha. Použitím binomické věty a následnou úpravou ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = 1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n}) \tag{12.6}$$

Z (12.6) dostaneme nahrazením závorek jedničkami nerovnost

$$(1+\tfrac{1}{n})^n < \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \tag{12.7}$$

a odtud limitním přechodem

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \le \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

Ukážeme opačnou nerovnost. Nabízí se v (12.6) udělat limitní přechod pro $n \to \infty$. Nemáme ale nástroj na úpravu limity součtu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{3!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n})\right)$$

na součet limit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n})\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{3!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})\right) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n})\right),$$

protože se počet sčítanců na pravé straně s rostoucím n zvětšuje.

Proto zvolíme $N \in \mathbb{N}$ a součet v (12.6) ukončíme pro $n > N$ u členu $\frac{1}{N!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{N-1}{n})$ a dostaneme (pro $n > N$)

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \geq 1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{N!}(1-\tfrac{1}{n}) \dots (1-\tfrac{N-1}{n}) \quad (12.8)$$

Nyní můžeme v (12.8) provést limitní přechod pro $n \to \infty$ a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{k!}$$

a odtud dalším limitním přechodem pro $N \to \infty$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

12.7.3 Eulerovo číslo je iracionální

Předpokládejme, že je Eulerovo číslo racionální, a tedy existují $p, q \in \mathbb{N}$ taková, že $e = \frac{p}{q}$. Použijeme (12.4) k vyjádření součinu $q!\, e$, o kterém z našeho předpokladu plyne $q!\, e \in \mathbb{N}$.

Součet na pravé straně

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

rozdělíme na dvě části a v následujících úlohách ukážeme, že první část má celočíselnou hodnotu a druhá má hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Odtud dostáváme spor s tvrzením $q!\, e \in \mathbb{N}$.

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

Úkoly.

1. Ukažte, že pro $k \leq q$ je $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

2. Ukažte, že pro $k > q$ je

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{q!(q+1)\cdots k} \leq \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

   Návod: v součinu $(q+1)\dots k$ nahraďte všechny činitele výrazem $q+1$. Je jich tam $k-q$ (z k činitelů $1 \cdot 2 \cdots k$ vypustíme prvních q).

3. Ukažte, že následující řada je geometrická a vypočtěte její kvocient.

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

4. Ukažte, že následující řada je konvergentní a vypočtěte její součet

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

   Návod: dosaďte do vzorce pro součet nekonečné geometrické řady a upravte.

5. Rozmyslete si, že z 2, 4 plyne

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{q!q}$$

6. Ukažte, že pro $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \in (0,1)$$

12.8 Mocninné řady

Definice.
Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ nazýváme *mocninnou řadou.*
Číslo x_0 nazýváme *středem* mocninné řady.

Čísla a_k nazýváme *koeficienty* mocninné řady.
Výrazy $a_k(x-x_0)^k$ nazýváme *členy* mocninné řady.

Bude nás zajímat, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ mocninná řada konverguje.

Věta o poloměru konvergence mocninné řady. Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost taková, že posloupnost absolutní hodnoty podílů $\{|a_k/a_{k+1}|\}$ má limitu rovnu $r \in \mathbb{R}^*$.
Pak pro $r = 0$ mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ konverguje pouze pro $x = x_0$.
Pro $r = +\infty$ mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ absolutně konverguje pro $x \in \mathbb{R}$.
Pro $r \in (0,+\infty)$ mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ absolutně konverguje pro $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ a nekonverguje pro $x < x_0 - r$ a pro $x > x_0 + r$.

Důkaz. Poznamenejme, že mocninná řada $\sum a_k(x-x_0)^k$ absolutně konverguje pro $x = x_0$. Pro $x \neq x_0$ použijeme podílové kritérium: $\left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}(x-x_0)}{a_k}\right| \to |x-x_0|/r$ pro $k \to \infty$.
Pro $r = 0$ je tato limita (v případě $x \neq x_0$) rovna $+\infty$, tedy řada pro tato x nekonverguje.
Pro $r = +\infty$ je tato limita rovna nule, proto řada absolutně konverguje pro $x \in \mathbb{R}$.
Pro $r \in (0,+\infty)$ má nerovnost $|r(x-x_0)| < 1$ řešení $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ a nerovnost $|r(x-x_0)| > 1$ řešení $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$. $\square$

Poznámky.
Číslo r podobných vlastností má každá mocninná řada – tedy i v případě neexistence limity $|a_k/a_{k+1}|$.
Číslo r těchto vlastností – tedy pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| < r$ mocninná řada absolutně konverguje a pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x-x_0| > r$ mocninná řada nekonverguje nazýváme *poloměrem konvergence* mocninné řady.
Množinu $(x_0 - r, x_0 + r)$ nazýváme *kruhem konvergence* mocninné řady. Termín je více intuitivní v komplexním oboru – množina $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < r\}$ je kruh o poloměru r se středem v bodě x_0. Obrázek vysvětlující význam kruhu konvergence najde čtenář v [4] na str. 43 (obrázek 2.1).

12.9 Řady, které umíme sečíst

Uvedeme, většinou bez důkazů, příklady řad, které umíme sečíst.

1. Geometrická řada: pro $q \in (-1,1)$ je $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$.

2. U některých řad je snadné spočítat částečné součty: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, a tedy i součet.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, důkaz v [4] používá funkci komplexní proměnné, její Laurentův rozvoj (zobecnění Taylorova polynomu) a výpočet křivkového integrálu. V úvodu [2] je tento součet odvozen z Taylorovy řady funkce sinus a „zobecnění“ vztahu mezi kořeny polynomu a jeho koeficienty na mocninné řady.

4. Derivováním geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ člen po členu dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Vztah $(\sum f_k(x))' = \sum f_k'(x)$ pro nekonečné součty nemusí platit, ale ve speciálním případě mocninných řad platí na kruhu konvergence (věta 8.3.10 v [2]).

5. Alternativní výpočet 4: řadu $\sum_{k=1} kx^k$ vyjádříme jako součet geometrických řad $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x^k$, sečtením dostaneme zase geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x}$, jejíž součet je $\frac{x}{(1-x)^2}$.

6. Víme, že $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, odvodili jsme to odhadem zbytku Taylorova polynomu. Podobně se dá ukázat pro $x \in \mathbb{R}$

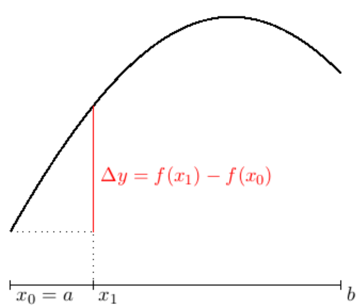
$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

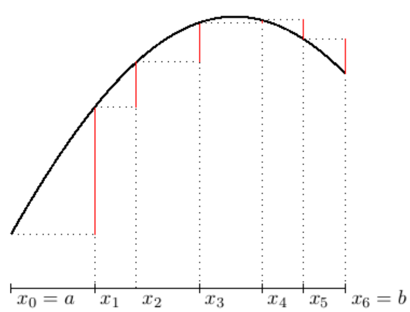
7. Pomocí Lagrangeova zbytku Taylorova polynomu ukážeme, že pro $x \in (-1, 1)$ je $\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Z Abelovy věty [3] plyne, že tento vztah platí i pro $x = 1$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$.

Kapitola 13

Integrály

Základní vysokoškolský kurz matematické analýzy se někdy nazývá diferenciální a integrální počet. V diferenciálním počtu se intervaly dělí na malé díly a zkoumá se, jak se na malém dílu mění funkční hodnota. Ústředními pojmy jsou přírůstek funkce a derivace funkce. V integrálním počtu se tyto malé díly skládají zpátky do celku.





Na levém obrázku je červeně vyznačen přírůstek funkce na intervalu $[x_0, x_1]$. Na pravém obrázku jsou vyznačeny postupně přírůstky na intervalech $[x_0, x_1], \dots, [x_5, x_6]$, na které jsme rozdělili interval $[a, b]$. Přírůstek na intervalu $[a, b]$ je součtem přírůstků na jednotlivých intervalech, přitom přírůstek je pro klesající funkci záporný ($\Delta y < 0$).

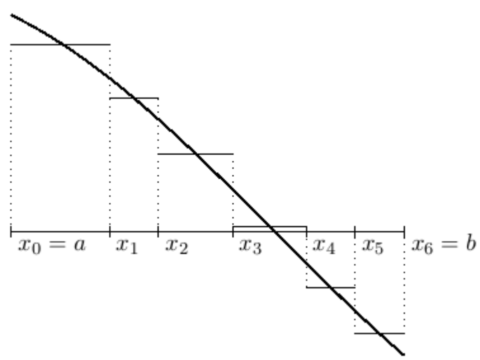
$$f(b) - f(a) = \sum \Delta y \tag{13.1}$$

Pro malé hodnoty přírůstků Δx, Δy je jejich podíl přibližně roven derivaci

$$f'(x) \doteq \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{13.2}$$

Z (13.2) vyjádříme Δy a dosadíme do (13.1). Dostaneme

$$f(b) - f(a) \doteq \sum f'(x)\Delta x \tag{13.3}$$



Na dalším obrázku je graf derivace f' na intervalu $[a, b]$ a na jednotlivých intervalech je vyznačena konstantní funkce o hodnotě $\Delta y/\Delta x$, o které víme, že je přibližně rovna hodnotě derivace $f'(x)$. Součet na pravé straně (13.3) je pak roven obsahu plochy mezi grafem derivace f' a osou x. Přitom část, ve které je f' záporná, tedy má graf pod osou x, bereme se záporným znaménkem.

Integrování je opačná operace od derivování. Funkce F, která splňuje vztah $F' = f$ se nazývá *neurčitým integrálem* funkce f. Jiný název, kterému budeme v tomto textu dávat přednost, je *primitivní funkce*.

Výše uvedený rozbor grafů funkce a její derivace naznačuje, že obsah obrazce mezi grafem funkce a osou x lze vypočítat jako rozdíl hodnot primitivní funkce v krajních bodech intervalu. Ukážeme později, že je to pravda pro spojitou funkci a naučíme se metody výpočtu primitivní funkce.

Nejdříve ale shrneme v úvodním článku poznatky o obsahu rovinných obrazců. Pak se budeme věnovat Riemannově integrálu, který je definován jako obsah obrazce mezi grafem funkce a osou x. Důležitým poznatkem je existence Riemannova integrálu ke spojité funkci a pojem integrálu s proměnnou horní mezí, který je nástrojem důkazu existence primitivní funkce ke spojité funkci.

V závěru kapitoly pojednáváme o Newtonově určitém integrálu a metodách jeho výpočtu. Podstatné je, že pro spojitou funkci mají Riemannův i Newtonův integrál stejnou hodnotu. Přitom pro Newtonův integrál máme metody výpočtu, zatímco geometrické aplikace se dají přirozenějším způsobem spojit s Riemannovým integrálem. Možná stojí za zmínku, že mnozí matematici s tímto tvrzením nesouhlasí a Riemannův integrál nemají příliš v oblibě. I z toho důvodu se zmíníme o některých jeho nedostatcích a o tom, jak je napravuje další typ integrálu, Lebesgueův.

13.1 Obsah obrazce

CO JE TO OBSAH? ROZEBRAT PODROBNĚ S OBRÁZKY NÁSLEDUJÍCÍ:

OBSAH ČTVERCE O JEDNOTKOVÉ DÉLCE JE $1j^2$, JAKÝ JE OBSAH OBDÉLNÍKU O STRANÁCH CELOČÍSELNÝCH, RACIONÁLNÍCH, IRACIONÁLNÍCH DÉLEK?

OBSAH TROJÚHELNÍKU, OBSAH MNOHOÚHELNÍKŮ.

OBSAH KRUHU, ELIPSY.

OBSAH OBECNÉHO ROVINNÉHO ÚTVARU, PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET – DOLNÍ A HORNÍ ODHAD OBSAHU.

Principy, které používáme při počítání obsahů rovinných obrazců.

1. Obsah obrazce je nezáporné číslo, nebo $+\infty$.
2. Obsah čtverce o hraně délky $1j$ je roven $1j^2$.
3. Obsah obrazce se nezmění při shodném zobrazení, tedy posunutí, otočení a osové souměrnosti. Znamená to, že vzor a obraz mají stejný obsah.
4. Rozdělíme-li obrazec na dvě části, které nemají společné body, je obsah obrazce roven součtu obsahů částí.
5. Část celku má nejvýše takový obsah jako celek.

Principy ve formálním tvaru.

1. Obsah je zobrazení, které množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ přiřadí číslo $o(A) \in [0, +\infty]$.
2. $o([0,1] \times [0,1]) = 1$
3. Pro shodné zobrazení s a $A \subseteq \mathbb{R}^2$ platí $o(A) = o(s(A))$.
4. Pro $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ splňující $A \cap B = \emptyset$ platí
$$o(A \cup B) = o(A) + o(B).$$
5. Pro $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ splňující $A \subseteq B$ platí $o(A) \leq o(B)$.

Z výše uvedených principů plynou další vlastnosti. Uvedeme některé z nich a ukážeme (nebo aspoň naznačíme), jak vlastnosti plynou z výše uvedených principů.

Vlastnosti.

1. Zvolíme-li ve třetím principu $A = [0,1] \times [0,1]$, $B = \emptyset$ a použijeme druhý princip, dostaneme $1 = o(\emptyset) + 1$, a tedy

$$o(\emptyset) = 0.$$

   Prázdná množina má nulový obsah.

2. Je-li $A \subseteq B$ a $o(B) = 0$, pak ze čtvrtého principu plyne $o(A) \leq 0$ a z prvního principu plyne $o(A) \geq 0$, a tedy $o(A) = 0$. *Podmnožina množiny nulového obsahu má také nulový obsah.*

3. Pro množiny $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, které jsou po dvou disjunktní, tedy platí $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$, dostaneme dvojí aplikací třetího pravidla $o(A \cup (B \cup C)) = o(A) + o(B \cup C) = o(A) + o(B) + o(C)$, a tedy

$$o(A \cup B \cup C) = o(A) + o(B) + o(C).$$

   Obsah sjednocení tří množin po dvou disjunktních je roven součtu obsahů množin.

4. Pro po dvou disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n$ dostaneme matematickou indukcí

$$o(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n o(A_k).$$

   Obsah sjednocení konečného počtu množin po dvou disjunktních je roven součtu obsahů množin.

5. Nakreslete obrázek množin $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ s nenulovým průnikem, zvolte vhodně množiny po dvou disjunktní a odvoďte z předchozích vztahů

$$o(A \cup B) + o(A \cap B) = o(A) + o(B).$$

   Součet obsahů dvou množin je roven součtu obsahu jejich sjednocení a jejich průniku.

6. Z předchozího vztahu a s nezápornosti obsahu plyne

$$o(A \cup B) \leq o(A) + o(B).$$

   Obsah sjednocení dvou množin je nejvýše roven součtu jejich obsahů. Tuto vlastnost nazýváme *subaditivita.*

7. Z předchozího odvodíme $o(A \cup (B \cup C)) \leq o(A) + o(B \cup C)$ a $o(B \cup C) \leq o(B) + o(C)$, a odtud
$$o(A \cup B \cup C) \leq o(A) + o(B) + o(C).$$
Obsah sjednocení tří množin je nejvýše roven součtu jejich obsahů.

8. Matematickou indukcí vztah zobecníme pro libovolný konečný počet množin
$$o(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} o(A_k).$$
Obsah sjednocení konečného počtu množin je nejvýše roven součtu jejich obsahů.

9. Výše jsme ukázali, že z principů plyne, že obdélník o stranách $a, b \in (0, +\infty)$ má obsah roven ab. Ukažme, že (libovolná) jednoprvková množina $A = \{[x, y]\}$ má obsah roven nule. Zvolme $\varepsilon > 0$ a uvažujme čtverec se středem v bodě $[x, y]$ a straně $\sqrt{\varepsilon}$. Jeho obsah je roven ε a z pátého principu tedy plyne $o(\{[x, y]\}) \leq \varepsilon$. Protože můžeme zvolit ε libovolně malé, platí
$$o(\{[x, y]\}) = 0$$
Jednoprvková množina má nulový obsah.

10. Z nulovosti obsahu jednoprvkové množiny a vlastnosti 4 plyne, že libovolná *konečná množina má obsah roven nule.*

13.1.1 Jordanova míra

V minulém článku jsme uvedli vlastnosti, které by mělo splňovat zobrazení, které množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ přiřadí její obsah. Bude nás zajímat, zda vůbec existuje zobrazení takových vlastností definované na množině všech podmnožin množiny $\mathbb{R}^2$.

V tomto článku zkonstruujeme z výše uvedených principů horní a dolní odhad obsahu pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Množiny, pro které se horní odhad rovná dolnímu odhadu, nazveme *Jordanovsky měřitelné* a společnou hodnotu dolního a horního odhadu nazveme *Jordanovou mírou* množiny. Uvedeme příklad množiny, pro kterou se horní a dolní odhad liší.

VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ MÍRA, PŘÍKLAD JORDANOVSKY NEMĚŘITELNÉ MNOŽINY

13.1.2 Lebesgueova míra

Víme, že množina racionálních čísel je spočetná. Znamená to, že existuje posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahující všechna racionální čísla. Víme, že konečné množiny jsou Jordanovsky měřitelné a mají míru rovnu nule. Tedy množiny $\cup_{k=1}^{n}\{q_k\}$ jsou všechny Jordanovsky měřitelné a mají nulovou míru. V minulém článku jsme viděli, že jejich sjednocení, tedy množina racionálních čísel, není Jordanovsky měřitelná množina. V teoretických konceptech se často hodí vlastnost

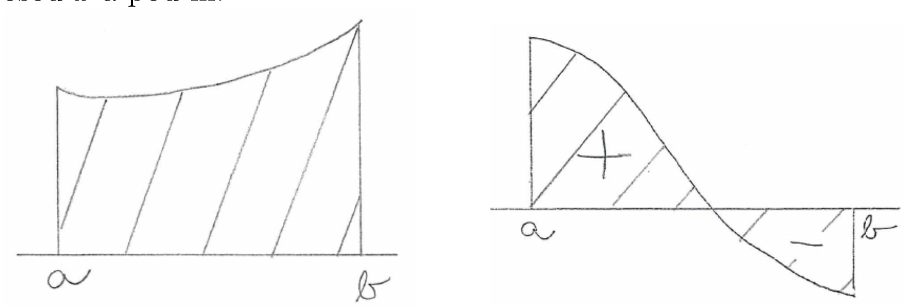
$$\text{Jsou-li množiny } A_k, k \in \mathbb{N} \text{ měřitelné,} \\ \text{je měřitelné i jejich sjednocení } \cup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Proto nevystačíme s Jordanovou mírou a zavádíme míru Lebesgueovu.

VNĚJŠÍ LEBESGUEOVA MÍRA, MĚŘITELNÉ MNOŽINY, EXISTENCE NEMĚŘITELNÉ MNOŽINY

13.2 Riemannův integrál

Níže budeme definovat Riemannův integrál. Budeme ho definovat pro omezenou funkci na omezeném intervalu. Pro nezápornou funkci má Riemannův integrál význam obsahu obrazce shora omezeného grafem funkce a zdola osou x. Pro obecnou funkci je Riemannův integrál rozdílem obsahů obrazců nad osou x a pod ní.

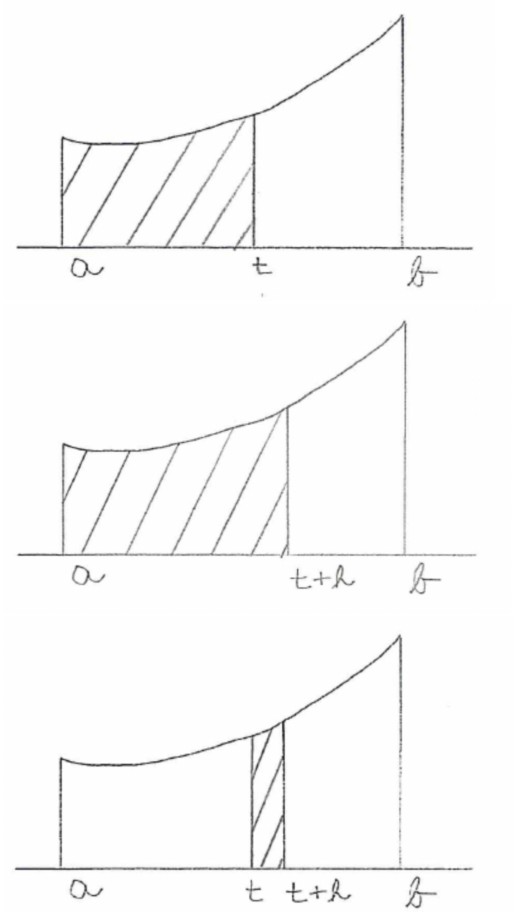


Riemannův integrál budeme definovat (a počítat) pro zadanou funkci na zadaném intervalu. Budeme ho značit symbolem $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde f značí integrovanou funkci a čísla $a < b$ jsou hranicemi intervalu, přes který integrujeme.

Přímo z definice budeme počítat Riemannův integrál jen z funkcí po částech lineárních (použijeme k tomu prostředky elementární geometrie –

vzorce pro obsah trojúhelníku, obdélníku a lichoběžníku) a jen na začátku, než si vypracujeme nástroje na pohodlnější výpočet.

Pro zadanou funkci f budeme zkoumat funkci, která číslu $t \in (a, b)$ přiřadí integrál s proměnnou horní mezí $R(t) = (\mathcal{R})\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. Na příkladech po částech lineárních funkcí ukážeme, že v bodě t, ve kterém je funkce f spojitá, je $R'(t) = f(t)$. Později ukážeme platnost tohoto vztahu pro libovolnou spojitou funkci. Proč tento vztah platí ilustrují následující obrázky.



Na horních obrázcích jsou vyšrafovány plochy o obsazích $R(t)$, $R(t + h)$. Na dolním obrázku má vyšrafovaná plocha obsah rovný rozdílu

$$R(t + h) - R(t)$$

a ten je přibližně roven obsahu obdélníku o šířce h a výšce $f(t)$. Odtud plyne

$$\frac{R(t + h) - R(t)}{h} \doteq f(t)$$

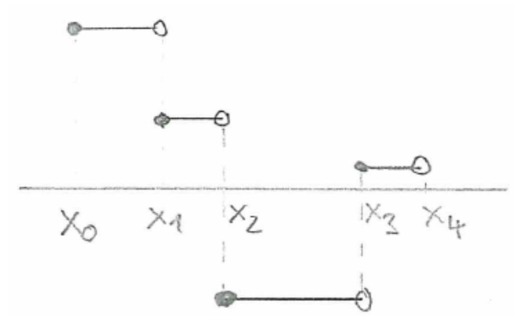
Tato vlastnost nás v následujícím článku povede k pojmu *primitivní funkce funkce* f. Je to funkce F splňující $F' = f$.
Probereme metody výpočtu primitivní funkce a v dalším článku pomocí primitivní funkce definujeme Newtonův integrál, jehož hodnota je pro spojité funkce rovna Riemannovu integrálu. Naučíme se tak počítat obsahy obecnějších obrazců.

Definice.
Dělením intervalu $[a, b]$ nazýváme $n+1$-ici čísel $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, body x_i nazýváme *uzlovými body* dělení.

Je-li $f_1, \dots, f_n$ posloupnost čísel, nazýváme funkci

$$f : x \mapsto f_i \qquad \text{pro } x \in [x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \dots, n$$

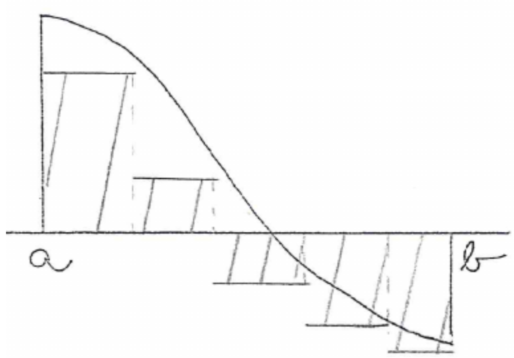
po částech konstantní funkcí na $[a, b]$.



Výraz $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f_i$ nazýváme *Riemannovým integrálním součtem funkce* f. Budeme ho značit $\mathcal{R}(f)$.

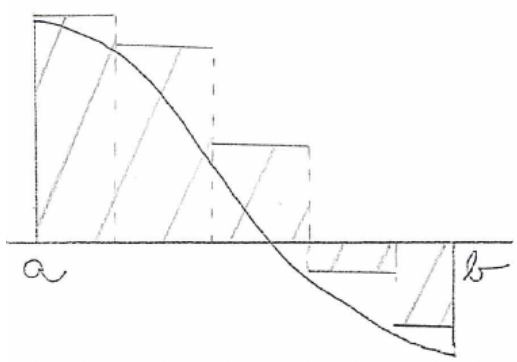
Nerovností mezi funkcemi budeme rozumět nerovnost funkčních hodnot, přitom uvedeme interval pro proměnnou: $f \leq g$ na $[a, b]$ tedy znamená, že pro všechna $x \in [a, b]$ je $f(x) \leq g(x)$.

Pro funkci g omezenou na intervalu $[a, b]$ definujeme:



Číslo $\mathcal{R}(f)$ pro libovolnou po částech konstantní funkci $f \leq g$ na intervalu $[a, b]$ nazýváme *dolním integrálním součtem* funkce g na intervalu $[a, b]$.

Dolním Riemannovým integrálem funkce g na intervalu $[a, b]$ nazýváme supremum dolních integrálních součtů funkce g na $[a, b]$. Značíme ho $(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$.



Horním integrálním součtem funkce g na intervalu $[a, b]$ je číslo $\mathcal{R}(f)$ pro libovolnou po částech konstantní funkci $f \geq g$ na $[a, b]$.

Horním Riemannovým integrálem funkce g na intervalu $[a, b]$ nazýváme infimum horních integrálních součtů funkce g na $[a, b]$. Značíme ho $(\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkci g nazveme *Riemannovsky integrovatelnou na* $[a, b]$, pokud se její horní a dolní Riemannovy integrály na $[a, b]$ rovnají. Jejich společnou hodnotu značíme $(\mathcal{R})\int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ a nazýváme *Riemannovým integrálem funkce g na* $[a, b]$.

Poznámky.

1. V naší definici je po částech konstantní funkce spojitá zprava. Ve skutečnosti na funkční hodnotě v uzlových bodech dělení nezáleží, Riemannův integrální součet by v tom případě byl definován stejně.

2. Riemannův integrál má smysl počítat jen na omezeném intervalu a jen pro omezené funkce. Je to proto, že ho aproximujeme integrálními součty přes konečný počet omezených intervalů. Na neomezeném intervalu by to nešlo.

   Každá po částech konstantní funkce nabývá konečného počtu hodnot, je tedy omezená. Pro shora neomezenou funkci f by neexistovala po částech konstantní funkce g splňující $f \leq g$. Podobně pro zdola neomezenou f by neexistovala g splňující $f \geq g$.
   TODO: OBRÁZEK

Vlastnosti.

1. TODO: OBRÁZEK
   Pro zadaný interval, na něm zadanou funkci, její dolní integrální součet $\mathcal{R}(f_d)$ a horní integrální součet $\mathcal{R}(f_h)$ platí $\mathcal{R}(f_d) \leq \mathcal{R}(f_h)$.

2. Pro funkci g omezenou na intervalu $[a, b]$ platí

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\bar{b}} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{13.4}$$

   Levá strana je rovna supremu množiny dolních integrálních součtů

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\mathcal{R}(f_d) : f_d \leq f \text{ na } [a, b]\}.$$

   Pravá strana je rovna infimu množiny horních integrálních součtů

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\bar{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\mathcal{R}(f_h) : f_h \leq f \text{ na } [a, b]\}.$$

   Z nerovnosti $\mathcal{R}(f_d) \leq \mathcal{R}(f_h)$ a z lemmatu o supremu a infimu pak plyne nerovnost (13.4). TODO: PŘESNĚJŠÍ ODKAZ NA LEMMA

Příklady.

1. $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, rovnoměrné dělení $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$. OBRÁZEK, DOLNÍ A HORNÍ INTEGRÁLNÍ SOUČET

2. Dirichletova funkce $D(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ pro $x \notin \mathbb{Q}$ na intervalu $[0, 1]$. Její dolní a horní Riemannův integrály jsou rovny

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{0}}^{1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\mathcal{R})\int_{0}^{\overline{1}} D(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

a není tedy Riemannovsky integrovatelná.

3. Riemannova funkce R je pro $x \notin \mathbb{Q}$ definovaná $R(x) = 0$ a pro racionální číslo $x = p/q$ vyjádřené v nesoudělném tvaru je $R(x) = 1/q$. V [3] je ukázáno, že Riemannova funkce je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0, 1]$ a její integrál je roven nule. Na straně 305 nahoře (elektronicky strana 49) je obrázek zobrazující horní integrální součet o velikosti ε pro (libovolně) malé $\varepsilon > 0$.

Lemma o Riemannovsky integrovatelné funkci. [1] Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existují dolní integrální součet $\mathcal{R}(f_d)$ a horní integrální součet $\mathcal{R}(f_h)$ funkce f takové, že $\mathcal{R}(f_h) - \mathcal{R}(f_d) < \varepsilon$.

TODO: OBRÁZEK, DŮKAZ

Věta o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce. [2] Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, pak je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

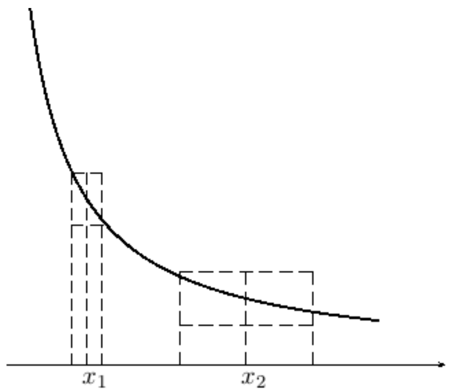
K důkazu potřebujeme pojem stejnoměrné spojitosti.
Spojitost funkce f na intervalu I lze zapsat

$$\begin{aligned}&(\forall x_0 \in I)(\text{funkce } f \text{ je spojitá v bodě } x_0,\ \text{pokud je } x_0 \text{ krajní bod,}\\ &\text{tak jednostranně zevnitř intervalu})\end{aligned}$$

nebo formálněji

$$(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$$

[1] [3], Věta 11.2.12, strana 299, elektronicky 43
[2] [3], Věta 11.2.23, strana 303, elektronicky 47



Na obrázku je graf spojité funkce, která má v bodě vlevo nevlastní limitu.
V bodech x_1, x_2 jsou vyznačena okolí funkčních hodnot $f(x_1)$, $f(x_2)$ o stejné velikosti $\varepsilon > 0$ a k nim okolí bodů x_1, x_2 splňující podmínku z definice spojitosti.
Vidíme, že číslo δ se pro různá x liší. Při zmenšování x_1, tedy při jeho posouvání doleva, se velikost δ dále zmenší.

Tím se liší spojitá funkce od stejnoměrně spojité funkce – u té je k zadanému ε stejné δ pro všechna x.

Definice. Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu* I, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Bez důkazu uvedeme větu o stejnoměrné spojitosti na uzavřeném intervalu[3]. Poznamenejme ještě, že funkce, jejíž graf je na obrázku nahoře, je spojitá na intervalu zleva otevřeném a v levém krajním bodě má nevlastní limitu. Není ji tedy možné do levého krajního bodu spojitě rozšířit.

Věta. Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

DŮKAZ věty o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce.
TODO: DŮKAZ, OBRÁZEK

13.2.1 Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

Budeme uvažovat funkci f, která má na intervalu $I = [a, b]$ Riemannův integrál a budeme zkoumat funkci

$$R : x \mapsto \begin{cases} (\mathcal{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t & x \in (a, b] \\ 0 & x = a \end{cases} \tag{13.5}$$

[3] [3], Věta 11.1.3, strana 296, elektronicky 40

kterou budeme nazývat *Riemannovým integrálem s proměnnou horní mezí.*

PŘÍKLAD NA VÝPOČET RIEMANNOVA INTEGRÁLU S PROMĚNNOU HORNÍ MEZÍ PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCE, SPOJITÉ I NESPOJITÉ A VÝPOČET JEHO DERIVACE

Vlastnosti Riemannova integrálu

1. **Monotonie.**
   Jsou-li f_1, f_2 funkce splňující $f_1 \leq f_2$ na intervalu $[a, b]$, pak stejná nerovnost platí pro jejich Riemannovy integrály

   $$(\mathcal{R})\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

   TODO: OBRÁZEK

2. **Integrál konstantní funkce** je součinem funkční hodnoty a šířky intervalu. Pro kladnou funkční hodnotu je Riemannův integrál roven obsahu obdélníku mezi grafem funkce a osou x. Pro zápornou funkční hodnotu až na záporné znaménko také.
   TODO: OBRÁZEK

3. **Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru.**
   Je-li funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a $c \in (a, b)$, pak je f Riemannovsky integrovatelná na $[a, c]$ i $[c, b]$ a platí

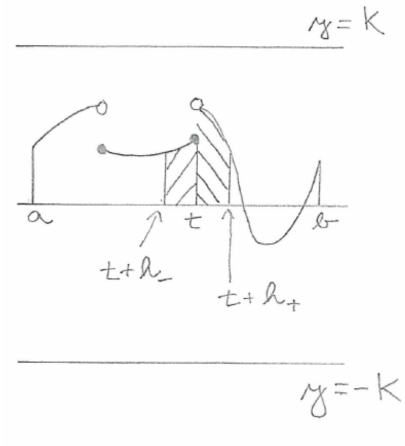
   $$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   TODO: OBRÁZEK

Důsledkem těchto tří vlastností je spojitost Riemannova integrálu jako funkce horní meze a derivace Riemannova integrálu podle horní meze. Viz následující dvě věty.

Věta o spojitosti Riemannova integrálu s proměnnou horní mezí. Je-li funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, pak je funkce R definovaná v (13.5) je spojitá na $[a, b]$.

DŮKAZ.



Protože je f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, je na $[a, b]$ omezená, tedy existuje konstanta $K \in \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall x \in [a, b])(f(x) \in [-K, K]). \tag{13.6}$$

Na ose jsou vyznačeny body $t + h_-$, t, $t + h_+$ a intervaly $[t + h_-, t]$, $[t, t + h_+]$. Číslo h_+ je kladné, h_- záporné a obě jsou (v absolutní hodnotě) malá. Funkce f může a nemusí být v bodě t spojitá.

Z aditivity vzhledem k integračnímu oboru plyne pro $h_+ > 0$

$$R(t + h_+) = R(t) + (\mathcal{R})\int_t^{t+h_+} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a pro $h_- < 0$

$$R(t) = R(t + h_-) + (\mathcal{R})\int_{t+h_-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vztahy upravíme na

$$\begin{aligned} R(t + h_+) - R(t) &= (\mathcal{R})\int_t^{t+h_+} f(x)\,\mathrm{d}x \\ R(t) - R(t + h_-) &= (\mathcal{R})\int_{t+h_-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Z (13.6) a z monotonie Riemannova integrálu plyne pro $a \le x_1 < x_2 \le b$ (za x_1, x_2 budeme dosazovat výše zmíněné body)

$$(\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} -K\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} K\,\mathrm{d}x.$$

Krajní integrály spočítáme jako Riemannovy integrály konstantní funkce

$$-K(x_2 - x_1) \le (\mathcal{R})\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \le K(x_2 - x_1).$$

Dosazením za x_1, x_2 dostaneme

$$-Kh_+ \le (\mathcal{R})\int_t^{t+h_+} f(x)\,\mathrm{d}x \le Kh_+$$
$$Kh_- \le (\mathcal{R})\int_{t+h_-}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \le -Kh_-$$

Z věty o třech limitách (jinak známé jako policejní věta) dostaneme, že hodnoty uvedených integrálů se blíží nule pro $h_+ \to 0^+$, $h_- \to 0^-$, a tedy i výrazy na levých stranách rovnic (13.7) se blíží nule.

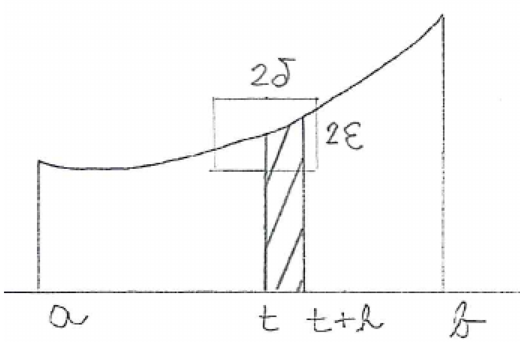
Z $R(t + h_+) - R(t) \to 0$ pro $h_+ \to 0^+$ plyne spojitost funkce R v bodě t zprava.

Z $R(t) - R(t + h_-) \to 0$ pro $h_- \to 0^-$ plyne spojitost funkce R v bodě t zleva.

Výše uvedené vztahy mají smysl pro $t \in (a, b)$. Pro $t = a$ má smysl uvažovat jen $h_+ > 0$. Dostáváme tak spojitost funkce R v bodě a zprava. Podobně dostaneme spojitost zleva v bodě $t = b$. □

Věta o derivaci Riemannova integrálu spojité funkce podle horní meze. Je-li f spojitá v bodě $t \in (a, b)$, pak má $R : t \mapsto (\mathcal{R})\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ v bodě t derivaci a platí $R'(t) = f(t)$.

Důkaz.



Protože je funkce f spojitá v bodě t, existuje pro kladné ε kladné δ takové, že pro $x \in (t - \delta, t + \delta)$ je

$$f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon.$$

Použijeme monotonii Riemannova integrálu na funkci f a konstantní funkce o hodnotách $f(t) \pm \varepsilon$. Dostaneme pro $h \in (0, \delta)$

$$(\mathcal{R})\int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x$$

a pro $h \in (-\delta, 0)$

$$(\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(t) - \varepsilon \,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(t) + \varepsilon \,\mathrm{d}x$$

V obou vztazích je vpravo i vlevo integrál z konstantní funkce. Jeho hodnotu vyjádříme jako součin funkční hodnoty a šířky intervalu

$$\begin{array}{rcccl} h(f(t)-\varepsilon) & \le & (\mathcal{R})\int_{t}^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x & \le & h(f(t)+\varepsilon) \\ -h(f(t)-\varepsilon) & \le & (\mathcal{R})\int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x & \le & -h(f(t)+\varepsilon) \end{array}$$

Integrály uprostřed vyjádříme pomocí aditivity Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru jako rozdíl

$$\begin{array}{rcccl} h(f(t)-\varepsilon) & \le & R(t+h)-R(t) & \le & h(f(t)+\varepsilon) \\ -h(f(t)-\varepsilon) & \le & R(t)-R(t+h) & \le & -h(f(t)+\varepsilon) \end{array}$$

Nyní vydělíme nerovnosti v prvním řádku kladným h a nerovnosti ve druhém řádku kladným $-h$. V obou případech dostaneme

$$f(t)-\varepsilon \;\le\; \frac{R(t+h)-R(t)}{h} \;\le\; f(t)+\varepsilon$$

Číslo $\varepsilon > 0$ jsme mohli zvolit libovolně malé a proto je

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(t+h)-R(t)}{h} = f(t)$$

□

V důkazu jsme použili pouze vlastnosti 1. – 3. Riemannova integrálu. Dokázali jsme tedy větu platnou i pro jiné typy integrálů (například Lebesgueův).

Věta o derivaci integrálu spojité funkce podle horní meze. Nechť zobrazení, které funkci f a intervalu I přiřadí reálné číslo O má vlastnosti

1. je monotonní vzhledem k proměnné f
2. konstantní funkci přiřadí součin její hodnoty a délky intervalu
3. je aditivní vzhledem k proměnné I

Číslo O budeme nazývat integrálem funkce f přes interval I.

Nechť funkce f je definovaná na intervalu I a spojitá ve vnitřním bodě t intervalu I. Zvolme $t_0 \in I$, $t_0 < t$.

Pak funkce, která číslu $x \in I$, $x > t_0$ přiřadí integrál funkce f přes interval (t_0, x), má v bodě t derivaci a ta je rovna $f(t)$.

13.2.2 Velmi stručně o Lebesgueově integrálu

13.2.3 Nevlastní Riemannův integrál

Napravuje to, že Riemannův integrál je definován jen na omezeném intervalu a pro omezené funkce.

Definice nevlastního integrálu vlivem meze. Nechť je $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $b > a$ je funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{b\to+\infty} (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, +\infty)$ a značíme ho

$$(\mathcal{R})\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně definujeme nevlastní Riemannův integrál na intervalu $(-\infty, b]$

$$(\mathcal{R})\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice nevlastního integrálu vlivem funkce. Nechť je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a pro každé $c \in (a, b)$ je funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, c]$, ale není Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{c\to b^-} (\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, b]$. Značí se obvykle stejně jako Riemannův integrál, tedy

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně pro funkci integrovatelnou na $[c, b]$, ale nikoliv na $[a, b]$ definujeme

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+} (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.8}$$

Poznámka. Vztah (13.8) platí i pro Riemannovsky integrovatelnou funkci, ale je pro něj vlastností, kterou je třeba dokázat, zatímco pro nevlastní integrál je definicí.

13.3 Primitivní funkce (neurčitý integrál)

DEFINICE PRIMITIVNÍ FUNKCE NA INTERVALU

LEMMA O JEDNOZNAČNOSTI AŽ NA ADITIVNÍ KONSTANTU

ZNAČENÍ; ZÁKLADNÍ VZORCE

Vlastnosti.

1. Linearita:
   Pokud má pravá strana smysl, tak pro funkce f, g a číslo c platí

$$\begin{aligned} \int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ \int c f(x)\,\mathrm{d}x &= c \int f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Vlastnost plyne z linearity derivace.

2. Spojitost:
   Je-li F funkce primitivní k funkci f na intervalu $I = (a, b)$, pak je F na I spojitá.
   Vlastnost plyne ze vztahu $F'(x) = f(x)$ a z věty spojitosti funkce v bodě, ve kterém má derivaci.

VĚTA O EXISTENCI PRIMITIVNÍ FUNKCE KE SPOJITÉ FUNKCI, NEMUSÍ BÝT ELEMENTÁRNÍ – PŘÍKLADY

13.4 Metody výpočtu primitivní funkce

13.4.1 Lineární substituce

13.4.2 Metoda integrace per partes (po částech)

13.4.3 Metoda substituce

13.4.4 Integrace parciálních zlomků

1. Jednonásobný reálný kořen

$$\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \log|x+a| \qquad \int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{\log|ax+b|}{b}$$

2. Vícenásobný reálný kořen

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x = \int (x+a)^{-n}\,\mathrm{d}x = (x+a)^{1-n}/(1-n) = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$$

3. Kvadratický trojčlen x^2+px+q s komplexními kořeny (tedy $4q-p^2>0$) a s konstantním čitatelem: nejdřív doplníme na čtverec

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+p/2)^2+q-p^2/4}\,\mathrm{d}x$$

a použijeme vzorec $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

4. Kvadratický trojčlen s jednonásobnými komplexními kořeny a lineárním čitatelem: nejdříve čitatel doplníme na násobek derivace jmenovatele

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a/2(2x+p)+b-ap/2}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

a rozdělíme na dva integrály. První spočítáme substitucí

$$\int \frac{a/2(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q)$$

a druhý jako v předchozím bodě

$$\int \frac{b-ap/2}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

5. Kvadratický trojčlen s násobnými komplexními kořeny: první krok je stejný jako u jednonásobných kořenů

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a/2(2x+p)+b-ap/2}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

První integrál spočítáme substitucí

$$\int \frac{a/2(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$

druhý doplníme na čtverec a použijeme rekurentní formuli

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2an(x^2+a)^n} + \frac{2n-1}{2an}\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kterou níže odvodíme. Začneme per partes na součin $1 \cdot \frac{1}{(x^2+a)^n}$

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{x}{(x^2+a)^n} + n\int \frac{2x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Pokračujeme úpravami

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2(x^2+a)-2a}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x - 2an\int \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pro stručnější vyjádření označme

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

pak je

$$I_{n+1} = \int \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

a výše odvozenou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2anI_{n+1}$$

a odtud vyjádříme I_{n+1}

$$I_{n+1} = \frac{x}{2an(x^2+a)^n} + \frac{2n-1}{2an}I_n$$

6. Alternativní tvar parciálních zlomků v případě násobných komplexních kořenů jmenovatele

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)' &= \frac{-2xn}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\ \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right)' &= \frac{(1-2n)x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

Příklady.

1. Na vysvětlení rozdílu standardního a alternativního způsobu najdeme primitivní funkci k funkci
$$\frac{x^3+4x^2}{(x^2+2)^2}$$
Standardní způsob:
$$\frac{x^3+4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$$
Multiplikativní konstanty vyjdou $A=1$, $B=4$, $C=-2$, $D=-8$.
Primitivní funkce k $\frac{x+4}{x^2+2}$ je $\frac{1}{2}\log(x^2+2)+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}$.
Primitivní funkce k $\frac{-2x}{(x^2+2)^2}$ je $\frac{1}{x^2+2}$.
Primitivní funkci k $\frac{-8}{(x^2+2)^2}$ najdeme dosazením $n=1$, $a=2$ do rekurentní formule a vynásobením -8. Vyjde $\frac{-2x}{x^2+2}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}$.
Výsledná primitivní funkce po sečtení a úpravě vyjde
$$\frac{1}{2}\log(x^2+2)+\frac{1-2x}{x^2+2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}$$
Alternativní způsob:
$$\frac{x^3+4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + C\frac{-2x}{(x^2+2)^2} + D\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$
Multiplikativní konstanty vyjdou $A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=-2$. Výsledná primitivní funkce vyjde stejně jako výše.

2. Vypočítáme ještě jeden integrál, jehož výsledek budeme potřebovat v další kapitole
$$\int \frac{6x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
Použijeme rozklad na parciální zlomky (tedy alternativní způsob)
$$\frac{6x^2}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+1}\right)' + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$
Vyjde $A=-3$, $B=0$, $C=0$, $D=3$ a tedy
$$\int \frac{6x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-3x}{x^2+1} + 3\operatorname{arctg} x.$$

13.5 Newtonův (určitý) integrál

Definice. Nechť má funkce f na intervalu (a,b) (který může být i omezený i neomezený) primitivní funkci F. Pak definujeme *Newtonův integrál funkce f na intervalu* (a,b) vztahem

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) \tag{13.9}$$

Pokud má pravá strana smysl, říkáme, že *(Newtonův) integrál existuje* nebo také říkáme, že f má na (a,b) Newtonův integrál. Pokud má pravá strana konečnou hodnotu, mluvíme o *vlastním integrálu*, říkáme, že *(Newtonův) integrál konverguje* a funkci f nazýváme *newtonovsky integrovatelnou na* (a,b). Má-li integrál nekonečnou hodnotu, mluvíme o *nevlastním integrálu*.
Rozdíl na pravé straně často značíme $[F(x)]_a^b$ případně $F(x)|_a^b$.

Poznámky.

Newtonův integrál nezávisí na výběru primitivní funkce, protože dvě různé primitivní funkce se liší konstantou, která se na pravé straně (13.9) odečte.

V [3] je v definici Newtonova integrálu místo primitivní funkce použita zobecněná primitivní funkce. My z důvodu zjednodušení vystačíme s primitivní funkcí.

Vlastnosti.

1. Linearita:
   Pokud má pravá strana smysl, tak pro funkce f, g a číslo c platí

$$\begin{aligned}(\mathcal{N})\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x &= (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+(\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\ (\mathcal{N})\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x &= c\,(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   Vlastnost plyne z linearity neurčitého integrálu a z věty o limitě součtu a násobku.

2. Aditivita vůči integračnímu oboru:
   Pokud má jedna ze stran smysl, tak pro $a<b<c$ platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+(\mathcal{N})\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=(\mathcal{N})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Pro vlastní integrály je vlastnost vidět dosazením do definice. Primitivní funkce je v bodě b spojitá, proto jsou obě jednostranné limity rovny její hodnotě v bodě b a odečtou se. Pro nevlastní integrály si stačí rozmyslet, že limity v bodě b jsou vlastní, a tedy buď mají smysl (jsou definovány) obě strany nebo žádná.
   TODO: NENÍ PRAVDA PRO NAŠI DEFINICI, PROBLÉM JE V EXISTENCI PRIMITIVNÍ FUNKCE V BODĚ b

Věta o integraci per partes. Jsou-li funkce f, g definované na intervalu $[a,b]$ a mají na něm derivaci, pak platí následující vztah za předpokladu, že má jeho pravá strana smysl

$$(\mathcal{N})\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=[f(x)g(x)]_a^b-(\mathcal{N})\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

DŮKAZ. Z pravidla pro derivaci součinu $(fg)'=f'g+fg'$ plyne $f'g=(fg)'-fg'$. Je-li H primitivní funkcí funkce fg', pak je $fg-H$ primitivní funkcí funkce $f'g$. □

Další metodou je substituce. Pro větší přehlednost jí věnujeme samostatný článek.

13.5.1 Metoda substituce

Derivace složené funkce

Odvození metody substituce je založeno na větě o derivaci složené funkce. Proto ji stručně zopakujeme.

Má-li funkce g v bodě t derivaci $g'(t)$ a funkce F derivaci v bodě $x = g(t)$ rovnu $F'(x)$, pak má složená funkce $t \mapsto F(g(t))$ v bodě t derivaci a ta je rovna $F'(g(t))g'(t)$.

Platí i následující „obrácená“ implikace: má-li složená funkce $t \mapsto F(g(t))$ v bodě t derivaci, označíme ji $(F(g(t)))'$ a má-li funkce g v bodě t nenulovou derivaci $g'(t)$, pak je derivace funkce F v bodě $x = g(t)$ rovna podílu $(F(g(t)))'/g'(t)$.

V matematických symbolech první implikaci zapíšeme

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow (F(g(t)))' = f(g(t))g'(t)$$

a druhou zapíšeme

$$\text{Je-li } g'(t) \neq 0, \text{ pak} \quad (F(g(t)))' = f(g(t))g'(t) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Podmínku $g'(t) \neq 0$ lze nahradit podmínkou: g je ryze monotonní (tedy rostoucí nebo klesající) na okolí bodu t a funkce f je spojitá v bodě $g(t)$. Označíme-li složenou funkci $t \mapsto F(g(t))$ symbolem H (tedy $H(t) = F(g(t))$), pak lze implikaci přepsat na

$$H'(t) = f(g(t))g'(t) \Rightarrow (H(g^{-1}(x)))' = f(x)$$

Každé z implikací odpovídá v dalším textu jedna z vět o substituci.

Přehození mezí

Zatím jsme definovali Newtonův integrál $(\mathcal{N})\!\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $a < b$. Při integrování substitucí $x = g(t)$ převedeme integrál přes interval $t \in (a, b)$ na interval o krajních bodech $g(a)$, $g(b)$ a chceme se vyhnout diskusi, které z čísel $g(a)$, $g(b)$ je větší a chceme připustit i jejich rovnost. Proto je užitečné definovat pro $a > b$

$$(\mathcal{N})\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathcal{N})\!\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\mathcal{N})\!\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Věty o substituci

Uvedeme dvě věty o substituci. Důkaz každé z nich se opírá o jednu z implikací uvedených výše. Věty se liší tím, že u první z nich připouštíme, že k substituční funkci g neexistuje inverzní funkce, u druhé inverzní funkci požadujeme.

Zformulujeme první větu, pak její použití ukážeme na příkladu a za příkladem provedeme důkaz.

Věta o substituci bez požadavku inverzní funkce. Nechť má funkce g na intervalu $I = (a, b)$ konečnou derivaci a funkce f je spojitá na $g(I)$. Pak za předpokladu existence integrálu na pravé straně existuje i integrál na levé straně a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = (\mathcal{N})\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13.10}$$

Příklad. Máme vypočítat integrál

$$(\mathcal{N})\int_0^{3\pi/2} \cos^5 t\,\mathrm{d}t. \tag{13.11}$$

Upravíme ho do tvaru

$$(\mathcal{N})\int_0^{3\pi/2} \cos t(1-\sin^2 t)^2\,\mathrm{d}t$$

a zvolíme substituci $x = g(t) = \sin t$. Intervalu $t \in (0, 3\pi/2) = I$ odpovídá interval $x \in g(I) = (-1, 1]$. Po substituci budeme integrovat funkci $f(x) = (1-x^2)^2$, která je spojitá na $g(I)$. Integrál (13.11) převedeme substitucí na integrál

$$(\mathcal{N})\int_{\sin 0}^{\sin(3\pi/2)} (1-x^2)^2\,\mathrm{d}x,$$

který spočítáme

$$(\mathcal{N})\int_0^{-1} (1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = [x - 2x^3/3 + x^4/5]_0^1 = -8/15.$$

Uvedená věta pak říká, že stejnou hodnotu má i původní nitegrál. Tedy

$$(\mathcal{N})\int_0^{3\pi/2} \cos^5 t\,\mathrm{d}t = -8/15.$$

Poznámka. Jak jsme uvedli dříve, substituční funkce g nemusí mít inverzní funkci. Odtud plyne, že krajními body obrazu $g(I)$ intervalu I nemusí být $g(a)$, $g(b)$. V příkladu výše je $g(I) = (-1, 1]$, zatímco $g(a) = 0$, $g(b) = -1$. Přesvědčete se o tom načrtnutím funkce g na intervalu I.

Důkaz. Ze spojitosti funkce f na intervalu $g(I)$ plyne existence primitivní funkce F na tomto intervalu (přitom v případě uzavřenosti intervalu $g(I)$ zprava nebo zleva lze funkci F v tomto bodě spojitě rozšířit). Z existence integrálu $(\mathcal{N})\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ dále plyne existence jednostranných limit funkce F v bodech $g(a)$, $g(b)$ – v menším zprava a ve větším zleva. Dále z existence integrálu plyne, že obě tyto limity nemohou být rovny stejnému nekonečnu.

Z věty o derivaci složené funkce plyne, že složená funkce $t \mapsto F(g(t))$ je primitivní funkcí funkce $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ na intervalu I.

Z věty o limitě složené funkce plyne rovnost limity funkce F v bodě a zprava a limity funkce $t \mapsto F(g(t))$ v bodě $g(a)$ (jednostranné/oboustranné, pokud je $g(a)$ krajním/vnitřním bodem intervalu $g(I)$). Analogicky pro limity v bodech b, $g(b)$.

Odtud pak plyne rovnost obou určitých integrálů v (13.10). □

Stejným způsobem uvedeme druhou větu o substituci. Nejdříve znění věty, pak příklad a na závěr důkaz věty.

Věta o substituci s inverzní funkcí. Nechť je funkce h na intervalu $I = (a, b)$ ryze monotonní (tedy rostoucí nebo klesající) a funkce k ní inverzní $g = h^{-1}$ má na $h(I)$ konečnou derivaci. Funkce f nechť je spojitá na I. Pak za předpokladu existence integrálu na pravé straně existuje i integrál na levé straně a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \tag{13.12}$$

Příklad. Máme vypočítat integrál

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\,\mathrm{d}x \tag{13.13}$$

Zvolíme substituci $t = h(x) = \sqrt{(x+1)/(2-x)}$, na čtenáři necháme odvození inverzního vztahu $x = g(t) = (2t^2 - 1)/(t^2 + 1)$ a jeho derivace

$g'(t) = 6t/(t^2+1)^2$. Meze integrálu po substituci jsou $h(-1) = 0$, $h(1) = \sqrt{2}$. Integrál po substituci je

$$(\mathcal{N})\int_0^{\sqrt{2}} \frac{6t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Primitivní funkci jsme spočítali v závěru kapitoly o integraci racionální funkce

$$(\mathcal{N})\int_0^{\sqrt{2}} \frac{6t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-3t}{t^2+1} + 3\operatorname{arctg} t\right]_0^{\sqrt{2}}.$$

Po dosazení vyjde $-\sqrt{2} + 3\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Podle věty o substituci je

$$(\mathcal{N})\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2} + 3\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

Důkaz provedeme nejdříve pro rostoucí funkci. Z existence integrálu na pravé straně (13.12) plyne existence primitivní funkce H k integrované funkci $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ na intervalu $(g^{-1}(a), g^{-1}(b))$ a existence limit funkce H v bodě $g^{-1}(a)$ zprava a v bodě $g^{-1}(b)$ zleva.

Z věty o derivaci složené funkce plyne, že funkce $x \mapsto H(g^{-1}(x))$ je primitivní funkce k funkci f na (a, b).

Z věty o limitě složené funkce pak plyne rovnost limit

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(a)^+} H(t) \\
\lim_{x\to b^-} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(b)^-} H(t)
\end{aligned}$$

a odtud plyne tvrzení věty pro rostoucí funkci g.

Je-li funkce h klesající na intervalu (a, b), a tedy funkce k ní inverzní $h^{-1} = g$ klesající na intervalu $(h(b), h(a))$, odlišuje se důkaz jen v limitách – na pravé straně se zamění limita zprava za limitu zleva

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(a)^-} H(t) \\
\lim_{x\to b^-} H(g^{-1}(x)) &= \lim_{t\to g^{-1}(b)^+} H(t)
\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka. Pro klesající funkci je možné integrál na pravé straně (13.12) napsat ve tvaru

$$(\mathcal{N})\int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(t))|g'(t)|\,\mathrm{d}t$$

a pro obecnou ryze monotonní funkci jako integrál z funkce $t \mapsto f(g(t))|g'(t)|$ přes vzor intervalu (a,b) ve funkci g^{-1}. Takový zápis použijeme při popisu substituce v integrálech funkcí dvou a více proměnných. Dvojice čísel nejsou uspořádané, a proto nedefinujeme monotonii funkcí více proměnných.

13.6 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu

V následující větě ukážeme, že pro funkci spojitou na omezeném uzavřeném intervalu existují oba integrály a mají stejnou hodnotu. Proto u určitých integrálů ze spojité funkce vynecháváme symbol $(\mathcal{N})$ případně $(\mathcal{R})$ odlišující oba integrály.

Newtonova – Leibnizova věta. Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak je Riemannovsky i Newtonovsky integrovatelná a oba integrály mají stejnou hodnotu.

Důkaz. Víme, že funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu Riemannovsky intervatelná. Dále víme, že funkce

$$R : x \mapsto (\mathcal{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad x \in (a,b)$$

je primitivní funkcí funkce f na intervalu (a,b) a že

$$\lim_{x\to a^+} R(x) = 0 \qquad \lim_{x\to b^-} R(x) = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud plyne, že je funkce f Newtonovsky integrovatelná na (a,b) a
$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Funkce s konečným počtem nespojitostí mají Riemannův integrál a nemají Newtonův integrál v tom zjednodušení, v jakém jsme podali definici Newtonova integrálu v tomto textu. Podle standardní definice, např. v [3] tyto funkce Newtonův integrál mají. My jeho neexistenci obejdeme rozdělením intervalu na sjednocení konečného počtu otevřených intervalů, na kterých je integrovatelná funkce spojitá, výpočtem Riemannova/Newtonnova integrálu na těchto intervalech a jejich následných sečtením.

TODO: PŘÍKLAD PO ČÁSTECH ELEMENTÁRNÍ FUNKCE A JEJÍCH INTEGRÁLŮ

Příkladem funkce Riemannovsky integrovatelné, ale nikoliv Newtonovsky integrovatelné je Riemannova funkce popsaná v článku o Riemannově integrálu.

Příkladem funkce Newtonovsky integrovatelné, ale nikoliv Riemannovsky integrovatelné je logaritmus na intervalu $[0, 1]$. Riemannovsky integrovatelná není protože není omezená. Primitivní funkcí k logaritmu je $x \mapsto x(-1+\log x)$ (vypočteme metodou per partes) a Newtonův integrál je konečný, protože jsou konečné limity (první vypočteme L'Hospitalovým pravidlem, druhou dosazením)

$$\lim_{x\to 0^+} x(-1 + \log x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} x(-1 + \log x) = -1$$

a má hodnotu -1.

13.7 „Lepení“ primitivních funkcí

Vysvětlíme techniku „lepení“ na výpočtu primitivní funkce k funkci

$$f : x \mapsto \frac{1}{4 + \sin x + 2\cos x}.$$

Protože je f spojitá na $\mathbb{R}$, existuje k ní na $\mathbb{R}$ primitivní funkce. Získáme ji jako určitý integrál

$$F : y \mapsto \int_{y_0}^{y} \frac{1}{4 + \sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ na intervalu $x \in (-\pi, \pi)$ s inverzní funkcí $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$.

Potřebujeme vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ pomocí t. Naznačíme jeden ze způsobů odvození:

Ze vzorců $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ odvodíme $\operatorname{tg}^2 x = (1 - \cos(2x))/(1 + \cos(2x))$ a odtud odvodíme $\cos x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$.

Ze vzorce $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ odvodíme $|\sin x| = |2t|/(1 + t^2)$. Z grafů

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $y = \sin x$ plyne, že $\sin x$ a t mají stejné znaménko, a proto je $\sin x = 2t/(1+t^2)$.

Shrneme odvozené

$$\begin{array}{ll} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x = 2 \operatorname{arctg} t \\ x \in (-\pi, \pi) & t \in \mathbb{R} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t^2+1} & \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}$$

Výše uvedenou substitucí vypočítáme integrál pro $y \in (-\pi, \pi)$ a zvolíme $y_0 = -\pi$. Po substituci a úpravě pravé strany vyjde

$$\int_{-\pi}^{y} \frac{1}{2 + \sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} y/2} \frac{2}{2t^2 + 2t + 6} \, \mathrm{d}t$$

Pravou stranu vypočítáme doplněním na čtverec $2t^2 + 2t + 6 = 2(t + 1/2)^2 + 11/2$ a použitím vzorce $(\operatorname{arctg}(t/a))' = 1/(t^2 + a^2)$ pro konstantu $a \neq 0$ a proměnnou t.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\operatorname{tg} y/2} \frac{1}{(t+1/2)^2 + 11/4} &= \left[\frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{11}} \right]_{-\infty}^{\operatorname{tg} y/2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{11}} + \frac{\pi}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

Pro $y = \pi$ získáme $F(\pi)$ spojitým rozšířením $F(\pi) = 2\pi/\sqrt{11}$.

Pro $y \in (\pi, 3\pi)$ použijeme aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru

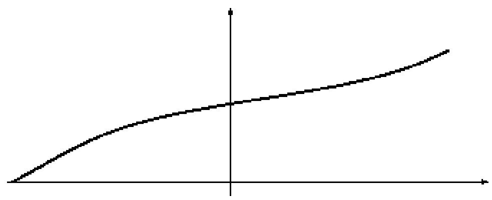
$$\int_{-\pi}^{y} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{y} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

První integrál jsme spočítali výše a u druhého využijeme toho, že integrovaná funkce je periodická a tedy platí

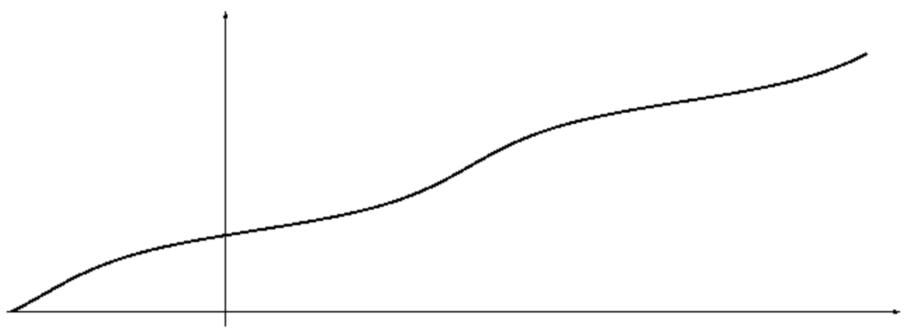
$$\int_{\pi}^{y} \frac{1}{4 + \sin x + 2\cos x} \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{y-2\pi} \frac{1}{4 + \sin x + 2\cos x} \, \mathrm{d}x.$$

Dostaneme pro $y \in (\pi, 3\pi)$ vztah $F(y) = \pi/\sqrt{11} + F(y - 2\pi)$.

Ještě nakreslíme grafy primitivní funkce F. Nejdříve na intervalu $(-\pi, \pi)$



a „slepením“ na intervalu $(-\pi, 3\pi)$.



Na větším intervalu bychom slepili více částí.

13.8 Co se (zatím) jinam nevešlo

Některé techniky vysvětlíme na integrálu $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

1. Použijeme vzorec pro kosinus dvojnásobného argumentu

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

   Výše uvedený tvar je nejznámější. Další dva tvary z něj odvodíme použitím vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dosadíme $\cos^x = 1 - \sin^2 x$ a po úpravě dostaneme

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

   nebo dosadíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a po úpravě dostaneme

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

   Nám se teď hodí poslední vztah – vyjádříme z něj $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Integrál pak spočítáme

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

2. Použijeme metodu per partes. Zvolíme $f'(x) = \cos x$, $g(x) = \cos x$, dopočítáme $f(x) = \sin x$, $g'(x) = -\sin x$ a dosadíme do pravidla per partes

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

Do integrálu vpravo dosadíme ze vzorce $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dostaneme

$$\sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

Vypočteme $\int 1 \,\mathrm{d}x = x$ a dostaneme rovnici

$$\int \cos^2 x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

ze které vyjádříme

$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$$

3. Odvodíme rekurentní vztah pro integrál $\int \cos^n x \,\mathrm{d}x$ metodou per partes. Zvolíme $f'(x) = \cos x$, $g(x) = \cos^{n-1} x$, dopočítáme $f(x) = \sin x$, $g'(x) = -(n-1) \sin x \cos^{n-2} x$ a dosadíme do pravidla per partes

$$\int \cos^n x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$

V integrálu vpravo dosadíme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dostaneme

$$\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$

a po úpravě

$$\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1) \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

Označíme $I_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x$. Pak je $\int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x = I_{n-2}$ a odvodili jsme pro $n \in \mathbb{R}$ (na vhodných intervalech pro x)

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Postupně upravíme

$$nI_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$$

a dostaneme vztah, který nazýváme *rekurentním vztahem*

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Dosadíme $n = 2$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} I_0$$

a protože je $I_0 = \int \cos^0 x \, \mathrm{d}x = x$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$$

Dosazením $n = 4$ dostaneme

$$I_4 = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2$$

a tedy

$$\int \cos^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{x}{8}$$

Podobně je $I_1 = \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$ a dosazením $n = 3$ dostaneme

$$I_3 = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x$$

13.9 Integrální kritérium konvergence řad

Budeme zkoumat konvergenci řady pro $\alpha > 0$.

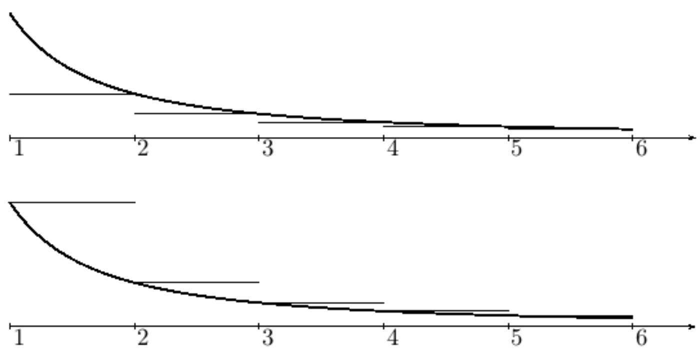
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{13.14}$$

Pro $\alpha = 1$ je (13.14) harmonická řada, o které víme, že má nekonečný součet. Ze srovnávacího kritéria pak dostaneme: pro $\alpha \in (0, 1)$ má řada (13.14) také nekonečný součet.

V kapitole o řadách jsme ukázali, že (13.14) je pro $\alpha = 2$ konvergentní a srovnávací kritérium dá konvergenci i pro $\alpha > 2$.

Zbývá rozhodnout, zda řada konverguje pro $\alpha \in (1, 2)$. Pomůžeme si integrály

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\end{aligned}$$



Na obrázcích je graf funkce $f : x \mapsto 1/x^\alpha$ a grafy po částech konstantních funkcí s hodnotami $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$,. . . .

Z monotonie funkce f plynou nerovnosti mezi f a po částech konstantními funkcemi a odtud a z monotonie určitého integrálu plyne

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Odtud limitním přechodem pro $n \to +\infty$ plyne

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

a tedy konvergence řady (13.14) pro $\alpha \in (1, +\infty)$.

Zobecněním uvedeného postupu dostaneme důkaz věty.

Věta – integrální kritérium konvergence řad. Nechť je funkce f nezáporná a nerostoucí na intervalu $[1, +\infty)$. Pak řada $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ konverguje právě když konverguje integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

13.10 Geometrické aplikace integrálu

TODO (na webu je odkaz na samostatný text)

Kapitola 14

Dodatek – rovnice přímky

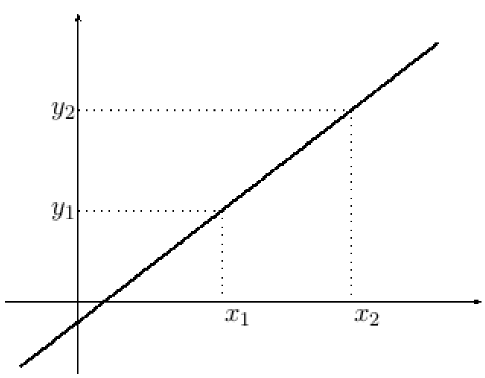
Pravděpodobně víte, že grafem lineární funkce $f : x \mapsto ax + b$ je přímka. Víte ale proč tomu tak je?

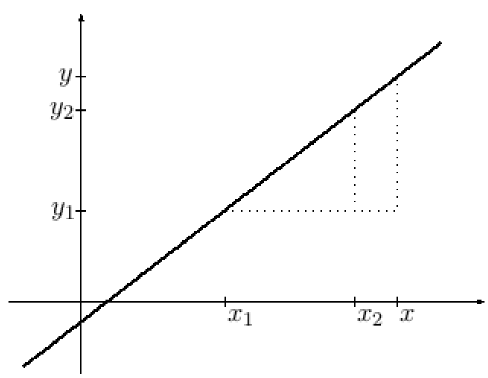
14.1 Rovnice přímky a podobnost trojúhelníků

Začneme opačným tvrzením, budeme zkoumat, jakou rovnici má přímka určená dvěma body.

Nejdřív probereme případ bodů se stejnou x-ovou souřadnicí, tedy bodů $[x_1, y_1]$, $[x_1, y_2]$. Přímka jimi určená je kolmá k ose x, není grafem žádné funkce a má rovnici $x = x_1$.

Dále probereme případ bodů, kdy je druhý vpravo nahoře od prvního Pro jejich souřadnice platí $y_2 > y_1$, $x_2 > x_1$.





Vlevo jsou znázorněny takové dva body a vpravo jsme do obrázku přidali další bod přímky a tečkovaně jsme vyznačili dva podobné pravoúhlé trojúhelníky.

Větší z nich má odvěsny délek $x-x_1$, $y-y_1$, ten druhý délek x_2-x_1, y_2-y_1. A z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{14.1}$$

Hodnotu výrazů v (14.1) nazýváme *směrnicí přímky*. Označíme ji k a vyjádříme pomocí souřadnic bodů na přímce

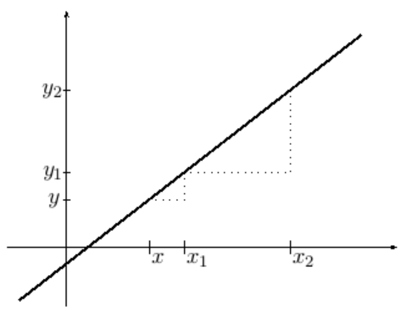
$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{14.2}$$

Rovnici přímky pak můžeme zapsat ve tvaru

$$y = y_1 + k(x-x_1) \tag{14.3}$$

Úlohy. Ze vztahů (14.1), (14.2) odvoďte vztah (14.3).
Napište rovnici přímky procházející body $[2,1]$, $[4,5]$.

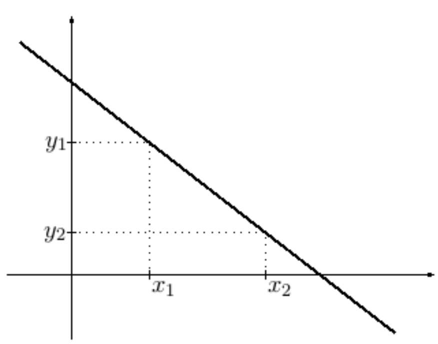
Výše jsme odvodili vztahy pro speciální polohu bodů. Na dalších obrázcích ukážeme, že odvozené vztahy platí i v obecné poloze.

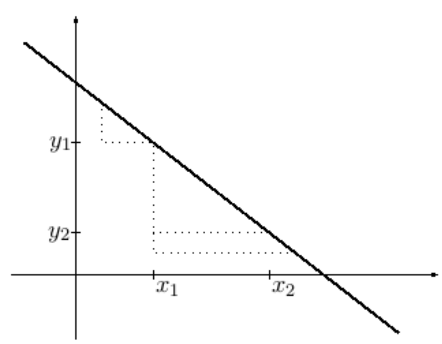


Uvažujme bod $[x,y]$ vlevo od bodu $[x_1,y_1]$. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

což je ekvivalentní vztahu (14.1).





Na obrázku vlevo jsou body splňující $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$. K nim jsou na obrázku vpravo zvoleny další dva body a čárkovaně dokresleny podobné trojúhelníky. Pro bod vlevo platí

$$\frac{y - y_1}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1},$$

pro bod vpravo

$$\frac{y_1 - y}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}.$$

Obě rovnosti upravíme vynásobením mínus jedničkou na (14.1).

Poslední případ je $y_1 = y_2$. Přímka je rovnoběžná s osou x a má rovnici $y = y_1$. Rozmyslete si, že tuto rovnici dostaneme jako speciální případ výše uvedených vztahů.

Závěr. Přímka určená dvěma různými body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ má v případě $x_1 = x_2$ rovnici $x = x_1$ a v případě $x_1 \neq x_2$ rovnici (14.3), kde za k dosadíme číslo vypočtené z (14.2).

14.2 Geometrický význam koeficientů

Odvodíme geometrický význam koeficientů a, b v rovnici $y = ax + b$.

Dosazením $x = 0$ dostaneme $y = b$. Proto protíná přímka o rovnici $y = ax + b$ osu y v bodě $[0, b]$.

Pro zjištění geometrického významu koeficientu a budeme potřebovat dva body přímky. Jejich souřadnice splňují rovnice $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Odečtením rovnic dostaneme $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ a po další úpravě

$$a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \tag{14.4}$$

tedy vztah (14.2), který jsme výše odvodili geometricky. Na následujících obrázcích ukážeme geometrický význam čísla a.

TODO: OBRÁZEK (Tato zkratka znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

14.3 Graf lineární funkce

Ukázali jsme, že každá přímka má rovnici buď $x =$ konstanta nebo (14.3). Možná se vám zdá, že z toho plyne, že každá rovnice (14.3) je rovnicí přímky. Není tomu tak, mohlo by se stát, že některé z rovnic popisují přímku a ostatní jinou křivku.

My zde ukážeme, že to nenastane, tedy, že každá rovnice (14.3) je rovnicí přímky. Vemte si z toho poučení, že v matematice je třeba každé tvrzení podložit důkazem. Nestačí se odkázat na zkušenost, že to ve všech dosud známých případech tak vždy bylo.

Přejděme tedy k důkazu. Uvažujme křivku o rovnici

$$y = ax + b \tag{14.5}$$

Dosaďme do ní dvě různé hodnoty x_1, x_2 a spočítejme k nim y_1, y_2. Dostaneme dva body, které na této křivce leží. Uvažujme rovnici přímky určené těmito dvěma body a zapišme ji ve tvaru

$$y = \tilde{a}x + \tilde{b} \tag{14.6}$$

Z (14.2) a z (14.4) plyne rovnost $a = \tilde{a}$. Dosazením x_1, y_1, $a = \tilde{a}$ do (14.5), (14.6) pak dostaneme $b = \tilde{b}$. odtud pak plyne totožnost rovnic (14.5), (14.6), a tedy i totožnost jejich grafů. A protože grafem (14.6) je přímka, je přímka i grafem (14.5).

Kapitola 15

Dodatek – úpravy výrazů

Při zkoumání vlastností funkcí neustále narážíme na nutnost umět upravovat výrazy. Proto těm „nejpotřebnějším“ úpravám věnujeme tento dodatek a čtenáři doporučíme se k němu vrátit pokaždé, když zjistí, že mu úpravy dělají potíže a potřebuje si je zopakovat.

15.1 Krácení kořenovým činitelem.

Krácení kořenovým činitelem je základní technika při počítání limit. Článek rozdělíme na dvě části. V první části budeme upravovat racionální funkce (podíly mnohočlenů), ve druhé výraz obsahující odmocniny.

15.1.1 Krácení v racionální funkci

Příklad. Určete definiční obor výrazu a pokraťte kořenovým činitelem, kořenovými činitely.

$$\frac{x^5 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

ŘEŠENÍ. Kořeny jmenovatele získáme vyřešením kvadratické rovnice: $x_1 = 1$, $x_2 = -1/2$, definiční obor výrazu tedy je množina $\mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$.

Číslo x_1 je též kořenem čitatele. Rozklad čitatele na součin získáme buď dosazením do vzorce $a^5 - b^5 = \dots$ nebo vydělením $(x^5 - 1) : (x - 1)$. V obou případech dostaneme

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Rozklad jmenovatele je

$$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1).$$

Pokrácením dostaneme

$$\frac{x^5-1}{2x^2-x-1} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{2x+1}.$$

Další společný kořen čitatel se jmenovatelem nemají, proto není další krácení možné.

Úkoly. Určete definiční obor výrazů a pokraťte kořenovým činitelem, kořenovými činitely.

1.

15.1.2 Krácení v iracionální funkci

Příklad. Určete definiční obor výrazu a pokraťte kořenovým činitelem, kořenovými činitely.

$$\frac{2x+\sqrt{x+5}}{1-x^2}$$

Řešení. Definiční obor výrazu je $[-5,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$, nebo jinak zapsané $[-5,+\infty) \setminus \{-1,1\}$. Kořeny jmenovatele jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Číslo x_1 je také kořenem čitatele. Abychom dokázali pokrátit, zbavíme se v čitateli odmocniny tím, že zlomek rozšíříme výrazem $2x - \sqrt{x+5}$ a použijeme vztah $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Dostaneme

$$\frac{2x+\sqrt{x+5}}{1-x^2} = \frac{4x^2-x-5}{(1-x^2)(2x-\sqrt{x+5})}$$

Nyní čitatele a jmenovatele rozložíme na součin kořenových činitelů

$$\frac{4x^2-x-5}{(1-x^2)(2x-\sqrt{x+5})} = \frac{(x+1)(4x-5)}{(1-x)(1+x)(2x-\sqrt{x+5})}$$

a pokrátíme

$$\frac{(x+1)(4x-5)}{(1-x)(1+x)(2x-\sqrt{x+5})} = \frac{4x-5}{(1-x)(2x-\sqrt{x+5})}$$

Další společné kořeny čitatel se jmenovatelem nemají.

15.2 Vytýkání a rozšiřování

Při počítání nevlastních limit (tedy limit pro proměnnou rostoucí nade všechny meze v kladných nebo záporných hodnotách) nás zajímají především členy s nejvyšší mocninou. *Většinou* stačí k prvnímu přiblížení ostatní členy „docela obyčejně škrtnout“. Například z výrazu $\sqrt{2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}$ „škrtnutím“ dostaneme výraz $\sqrt{2x^4}=x^2\sqrt{2}$. Korektní postup je místo škrtání nejvyšší mocninu vytknout

$$\sqrt{2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}=x^2\sqrt{2+\tfrac{3}{x}+\tfrac{4}{x^2}+\tfrac{5}{x^3}+\tfrac{6}{x^4}}$$

Výraz pod odmocninou pak pro velká x nabývá hodnotu blízkou $\sqrt{2}$.

Pokud čtenáři takové vytýkání dělá problémy, doporučujeme mu nahradit ho rozšířením – stejným výrazem jako jsme vytýkali, tedy x^2.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^4+3x^3+4x^2+5x+6} &= x^2\frac{\sqrt{2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}}{x^2}\\ &= x^2\frac{\sqrt{2x^4+3x^3+4x^2+5x+6}}{\sqrt{x^4}}\\ &= x^2\sqrt{2+\tfrac{3}{x}+\tfrac{4}{x^2}+\tfrac{5}{x^3}+\tfrac{6}{x^4}}\end{aligned}$$

Pozor přitom na následující úpravy.
Pro jaká x platí $\sqrt{x^2}=x$?
Pro jaká x platí $\sqrt{x^4}=x^2$?

V následujícím výrazu vytkneme x a zkrátíme. Úpravy platí pro $x>0$.

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\frac{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x(2+\frac{3}{x})}=\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}$$

Totéž provedené výše popsanou technikou rozšíření

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\frac{\frac{1}{x}(x+\sqrt{x^2+1})}{\frac{1}{x}(2x+3)}=\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}$$

Pro $x<0$ je $\sqrt{x^2}=-x$, a proto je

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\frac{\frac{1}{x}(x+\sqrt{x^2+1})}{\frac{1}{x}(2x+3)}=\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}$$

15.3 Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky je opačná operace ke sčítání zlomků. Například z výsledku sčítání TODO

Výklad rozdělíme na dvě části. Ve druhé části vysvětlíme, jak ke konkrétní racionální funkci určit tvar parciálních zlomků. V první části vysvětlíme, jak ke známému tvaru určit koeficienty parciálních zlomků.

15.3.1 Určení koeficientů při rozkladu na parciální zlomky

15.3.2 Určení jmenovatelů parciálních zlomků

15.4 Úpravy při odvozování derivací

V tomto článku probereme úpravy výrazů, které používáme k odvození vzorců pro derivaci mocninných funkcí a odmocnin.

15.4.1 Použití binomické věty

Z binomické věty dostaneme

$$\begin{aligned}
(x+h)^2 &= x^2 + 2xh + h^2 \\
(x+h)^3 &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\
(x+h)^4 &= x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 \\
&\vdots \\
(x+h)^n &= x^n + nx^{n-1}h + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n
\end{aligned}$$

a odtud dále dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \\
\frac{(x+h)^3-x^3}{h} &= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2 \\
\frac{(x+h)^4-x^4}{h} &= \frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h} = 4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3 \\
&\vdots \\
\frac{(x+h)^n-x^n}{h} &= \frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h} \\
&= nx^{n-1}+\tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}
\end{aligned}
$$

15.4.2 Odstraňování rozdílu odmocnin

Použijeme vzorce:

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\
a^4-b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\
&\vdots \\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})
\end{aligned}
$$

Zvolíme: $a=\sqrt[n]{x+h}$, $b=\sqrt[n]{x}$ a rozšíříme výrazem $a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}$. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+h}-\sqrt{x} &= \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x} &= \frac{h}{(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}} \\
\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x} &= \frac{h}{(x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}} \\
&\vdots \\
\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x} &= \frac{h}{(x+h)^{(n-1)/n}+(x+h)^{(n-2)/n}x^{1/n}+(x+h)^{(n-3)/n}x^{2/n}+\cdots+x^{(n-1)/n}}
\end{aligned}
$$

a odtud dále

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{1}{(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}\\
\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h} &= \frac{1}{(x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}}\\
&\vdots\\
\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{h} &= \frac{1}{(x+h)^{(n-1)/n}+(x+h)^{(n-2)/n}x^{1/n}+(x+h)^{(n-3)/n}x^{2/n}+\cdots+x^{(n-1)/n}}
\end{aligned}$$

Kapitola 16

Dodatek – AG nerovnost

Ag nerovnost je zkratka pro nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Obsahem této kapitoly je definování obou průměrů, formulace a důkaz ag nerovnosti a ukázky jejího použití.

16.1 Aritmetircký průměr

Definice. Nechť je n kladné přirozené číslo a $a_1, \ldots, a_n$ reálná čísla. *Aritmetickým průměrem* těchto čísel rozumíme číslo

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Příklad. Aritmetickým průměrem čísel 3, 5, -2, 1 je číslo 7/4.

Vlastnosti.

1. Pro $n = 1$, tedy soubor o jednom čísle a je jeho aritmetický průměr roven tomuto číslu a.

2. Pokud se čísla a_1,…,a_n rovnají, rovnají se i svému aritmetickému průměru.

3. Seřadíme-li čísla: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, pak jejich aritmetický průměr leží v intervalu $[a_1, a_n]$. Jinak řečeno, aritmetický průměr souboru čísel je alespoň tak velký jako nejmenší z nich a nejvýše velký jak největší z nich.

Tvrzení plyne z nerovností

$$na_1 \leq a_1 + \cdots + a_n \leq na_n$$

4. Přidáme-li k číslům $a_1, \ldots a_n$ jako $n+1$-ní prvek jejich aritmetický průměr $a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_n)/n$, bude mít nový soubor stejný aritmetický průměr. Dokážeme toto tvrzení výpočtem. Napíšeme aritmetický průměr
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{n+1}$$
a v čitateli vytkneme součet $a_1 + \cdots + a_n$
$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)(1 + \frac{1}{n})}{n+1}.$$
Po úpravě, výraz $1+1/n$ uvedeme na společného jmenovatele a zkrátíme výrazem $n+1$, dostaneme
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

5. Na číselné ose leží aritmetický průměr $(a+b)/2$ ve středu úsečky určené body a, b.

   Pokud tomu nevěříte: pro $a < b$ je délka úsečky o krajních bodech a, b rovna $b-a$, její polovina je $(b-a)/2$. Polohu středu úsečky dostaneme přičtením této délky k a, tedy $a + (b-a)/2$. Úpravou tohoto výrazu dostaneme aritmetický průměr.

   Jak zdůvodníte tvrzení, pokud neplatí $a < b$?

16.2 Geometrický průměr

Definice. Nechť je n kladné přirozené číslo a $a_1, \ldots, a_n$ nezáporná reálná čísla. *Geometrickým průměrem* této n-tice rozumíme číslo $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Příklad. Geometrickým průměrem čísel 3, 5, 2, 1 je číslo $\sqrt[4]{30}$.

Vlastnosti.

1. Pro $n = 1$, tedy soubor o jednom čísle a je jeho geometrický průměr roven $a^{1/1}$, tedy a.

2. Pokud se čísla $a_1,\dots,a_n$ rovnají, rovnají se i svému geometrickému průměru.

   Proč? Pro $a \geq 0$ je $\sqrt[n]{a^n} = a$. Poznamenejme, že pro záporné a a sudé n se oba výrazy liší znaménkem.

3. Seřadíme-li čísla: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, pak jejich geometrický průměr leží v intervalu $[a_1, a_n]$.

   Tvrzení plyne z nerovností

   $$a_1^n \leq a_1 \cdot \ \cdots \cdot a_n \leq a_n^n$$

4. Při přidání geometrického průměru k n-tici nezáporných čísel $a_1,\dots,a_n$ se jejich geometrický průměr nezmění.

   Ukážeme výpočtem: geometrický průměr $n+1$-ice $a_1,\dots,a_n$, $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ je

   $$\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

   Po úpravách

   $$(a_1 \cdots a_n (a_1 \cdots a_n)^{1/n})^{1/(n+1)} = (a_1 \cdots a_n)^{1/(n+1)} (a_1 \cdots a_n)^{1/(n(n+1))}$$
   $$= (a_1 \cdots a_n)^{1/(n+1)+1/(n(n+1))}$$

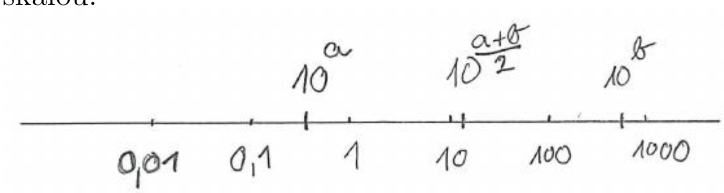
   Upravíme exponent

   $$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

   a dosadíme zpět do průměru

   $$(a_1 \cdots a_n)^{1/(n+1)+1/(n(n+1))} = (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

5. Geometrický průměr kladných čísel lze znázornit na ose s logaritmickou škálou.

   Ve středu úsečky určené čísly $A = 10^a$, $B = 10^b$ je číslo $10^{(a+b)/2}$, které je geometrickým průměrem čísel A, B.

16.3 Ag nerovnost

Věta o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Nechť je n kladné přirozené číslo. Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}. \tag{16.1}$$

Přitom rovnost v (16.1) platí jen v případě $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.[1]

Poznámky.

1. V [2] je ag nerovnost formulovaná a dokázaná ve tvaru

   $$a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^n$$

   Má to důvod. V [2] je existence odmocniny dokázána v příkladu 2.4.15 za použití ag nerovnosti. Pokud bychom před důkazem ag nerovnosti předpokládali existenci odmocniny, použili bychom důkaz kruhem. Přemýšlejte, proč takový důkaz není správný.[2]

   V matematice a jiných vědních disciplínách se dodržuje zásada budovat nové pojmy na základě starých, již definovaných. My jsme se jejího porušení v tomto případě vyhnuli zařazením textu o ag nerovnosti do dodatku. Zásadu porušujeme i jinde z výukových důvodů. Poznávání zpravidla nejde od jednoho poznatku k dalšímu, ale točí se ve spirále. Poznání nového často studentovi slouží k pochopení starého. A například zde se domníváme, že s odmocninami je text pro studenty čitelnější.

2. Ag nerovnost pro dvě čísla lze znázornit na grafu logaritmu. Nakreslete graf logaritmu a na kladné poloose x zvolte dvě různá čísla a, b. Doprostřed mezi ně nakreslete $(a + b)/2$, tedy jejich aritmetický průměr. Graf logaritmu nám poslouží k nakreslení geometrického průměru g. Platí pro něj $\log g = \log \sqrt{ab} = (\log a + \log b)/2$. Použijte tedy graf logaritmu na vyznačení hodnot $A = \log a$, $B = \log b$ na ose y. Uprostřed mezi nimi nakreslete $(A + B)/2 = \log g$ a opět použijte graf logaritmu

[1] Přesnější, a tedy lepší, je místo „jen v případě“ říct „právě když“. Diskutujte o rozdílu.

[2] A pokud rádi s přáteli diskutujete o rozličných tématech, dávejte pozor, zda důkaz kruhem vy nebo ostatní nepoužíváte při své argumentaci.

na vyznačení hodnoty geometrického průměru g na ose x. Bod odpovídající geometrickému průměru g by vám měl vyjít vlevo od bodu odpovídajícího aritmetickému průměru $(a+b)/2$. Souvisí to s tím, že na intervalu mezi a a b je graf logaritmu nad úsečkou spojující krajní body $[a, \log a]$, $[b, \log b]$.

Věta o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem v mocninném tvaru. Nechť je n kladné přirozené číslo. Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^n . \tag{16.2}$$

Přitom rovnost v (16.2) platí právě když je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Důkaz ag nerovnosti v mocninném tvaru přebíráme z [2].

Pro $n = 1$ je ag nerovnost zřejmá.

Dokážeme ag nerovnost pro $n = 2$.
Upravíme výraz $(a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2$ na

$$(a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = 4a_1a_2$$

a odtud odvodíme nerovnost

$$4a_1a_2 \leq (a_1 + a_2)^2$$

a tu upravíme na

$$a_1a_2 \leq ((a_1 + a_2)/2)^2$$

Rovnost platí v případě $(a_1 - a_2)^2 = 0$, tedy v případě $a_1 = a_2$.

K důkazu pro $n > 2$ je v [2] použita atypická matematická indukce. Dokáže se indukční krok: platí-li tvrzení pro n, pak platí i pro $2n$. Tím se ukáže platnost pro $n = 4, 8, 16, \dots$. My tento indukční krok zjednodušíme, dokážeme ag nerovnost pro $n = 4$ a $n = 8$.

Pro ostatní n se pak dokazuje indukční krok: platí-li tvrzení pro n, platí i pro $n-1$. My tento indukční krok opět zjednodušíme, dokážeme ag nerovnost pro $n = 7$.

Úplný důkaz najde čtenář v [2] pod lemmatem 1.3.28.

1. Ag nerovnost pro čtyři čísla.
   Čísla a_1, a_2, a_3, a_4 rozdělíme na dvojice, pro které víme, že platí

$$a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \tag{16.3}$$

$$a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \tag{16.4}$$

   Vynásobením nerovností (16.3), (16.4) dostaneme

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$$

   a po drobné úpravě

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \tag{16.5}$$

   Nyní napíšeme ag nerovnost pro čísla $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_3+a_4}{2}$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \leq \left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2 \tag{16.6}$$

   a po dvou úpravách dostaneme

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4 \tag{16.7}$$

   Nerovnosti (16.5) a (16.7) spolu s tranzitivitou dají požadovanou ag nerovnost

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4 \tag{16.8}$$

   Rovnost v (16.8) platí právě když platí rovnosti v (16.5), (16.7) a ty platí právě když platí rovnosti v (16.3), (16.4) a (16.6). To je možné jen v případě $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

2. Ag nerovnost pro osm čísel.
   Opět rozdělíme čísla na dvě skupiny, tentokrát čtveřice a pro každou z nich napíšeme ag nerovnost, tyto nerovnosti vynásobíme a provedeme drobnou úpravu

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \cdot \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4} \right)^4 \tag{16.9}$$

   Dále napíšeme ag nerovnost pro dvě čísla – zlomky na pravé straně (16.9)

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \cdot \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4} \leq \left(\frac{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} + \frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}}{2} \right)^2 \tag{16.10}$$

   Výraz v závorce na pravé straně upravíme na $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$, nerovnost (16.10) umocníme na čtvrtou a spolu s nerovností (16.9) (a tranzitivností nerovnosti) dostaneme

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{8} \right)^8 \tag{16.11}$$

   A to je ag nerovnost pro osm čísel.

   Aby platila v (16.11) rovnost, musí platit v (16.9) a (16.10), odkud plyne rovnost čísel $a_1, \ldots, a_8$.

3. Ag nerovnost pro sedm čísel.
   V případě, že je $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 0$, je jejich geometrický i aritmetický průměr roven nule a ag nerovnost platí. V opačném případě je aritmetický průměr kladný (v dalším uvidíme, že nám tato vlastnost zjednoduší úvahy). K sedmi číslům přidáme osmé, které je rovno jejich aritmetickému průměru $a_8 = (a_1 + \cdots + a_7)/7$. Víme, že se tím nezmění aritmetický průměr tedy, že platí

$$\frac{a_1 + \cdots + a_8}{8} = \frac{a_1 + \cdots + a_7}{7} \tag{16.12}$$

   Napišme ag nerovnost pro našich osm čísel a použijme (16.12)

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \frac{a_1 + \cdots + a_7}{7} \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_7}{7} \right)^8 \tag{16.13}$$

V případě, že je aritmetický průměr kladný, můžeme jím nerovnost (16.13) zkrátit

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_7}{7} \right)^7 \tag{16.14}$$

a dostáváme ag nerovnost pro sedm čísel.

Protože je aritmetický průměr (16.12) nenulový, platí rovnost v (16.14) právě když je v (16.13). A v (16.13) platí rovnost právě když se $a_1, \ldots, a_7$ rovnají.

□

Úkoly.

1. Odvoďte ag nerovnost pro šestnáct čísel.

2. Odvoďte ag nerovnost pro šest čísel.

Důkaz ag nerovnosti. V kapitolách o posloupnostech a spojitých funkcích je ukázána existence odmocniny z nezáporných čísel a tedy i existence geometrického průměru. K dokončení důkazu ag nerovnosti použijeme dokázanou nerovnost (16.2) a lemma o umocňování coby ekvivalentní úpravě z kapitoly o číslech. □

16.4 Použití ag nerovnosti

1. Pro $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 + 1/n$, $a_{n+1} = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_{n+1} &= (1 + 1/n)^n \\ \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} &= \frac{n(1 + 1/n) + 1}{n+1} \end{aligned}$$

a odtud po úpravě aritmetického průměru dostaneme z ag nerovnosti

$$(1 + 1/n)^n < (1 + 1/(n+1))^{n+1} \tag{16.15}$$

V kapitole o posloupnostech zkoumáme posloupnost $\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Ze vztahu (16.15) plyne, že je uvedená posloupnost rostoucí.

2. Obdobně dokážeme, že pro $x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\{(1+x/n)^n\}_{n=n_0}^{\infty}$ od určitého indexu n_0, který závisí na hodnotě x, rostoucí. Zvolíme $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 + x/n$, $a_{n+1} = 1$ a vypočteme

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dots a_{n+1} &= (1+x/n)^n \\ \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} &= \frac{n(1+x/n)+1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1} \end{aligned}$$

Ag nerovnost jsme dokázali pro $a_i \geq 0$, to je v tomto případě splněno pro $n \geq -x$. Pro tato n tedy platí

$$(1+x/n)^n \leq (1+x/(n+1))^{n+1} \tag{16.16}$$

a odtud plyne, že posloupnost $\{(1+x/n)^n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je pro $n_0 \geq -x$ neklesající (pro $x \neq 0$ dokonce rostoucí).

3. V [2], v příkladu 2.4.15, je pro $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ zkoumaná posloupnost, která je zadaná rekurentně

$$x_1 = 1, \qquad x_n = \frac{1}{p}\left((p-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{p-1}}\right) \tag{16.17}$$

Pomocí ag nerovnosti ukážeme, že pro $n \geq 2$ je $x_n^p \geq a$. Nejdříve pro zjednodušení v případě $p = 2$. Vztahy (16.17) přepíšeme na

$$x_1 = 1, \qquad x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

Zvolíme $a_1 = x_{n-1}$, $a_2 = a/x_{n-1}$. Pak je

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= a \\ \frac{a_1 + a_2}{2} &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Z ag nerovnosti pak pro $n \geq 2$ plyne

$$a \leq x_n^2$$

což jsme chtěli dokázat.

4. Ukažme nyní platnost $x_n^p \geq a$ v obecném případě (16.17). Zvolíme $a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1} = x_n$, $a_p = a/x_n^{p-1}$. Pak je

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dots a_p &= a \\ \frac{a_1 + \cdots + a_p}{p} &= \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right) \end{aligned}$$

a z ag nerovnosti plyne pro $n \geq 2$

$$a \leq x_{n+1}^p \tag{16.18}$$

Kapitola 17

Dodatek – Binomická věta

Odvodíme postupně vzorce pro $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ ...

Začneme $(a+b)^2$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab\\ &\quad\; +ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Při odvození $(a+b)^3$ použijeme již odvozený vzorec pro $(a+b)^2$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a(a+b)^2+b(a+b)^2\\ &= a^3+2a^2b+ab^2\\ &\quad\; +ba^2+2bab+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

A při odvození $(a+b)^4$ použijeme již odvozený vzorec pro $(a+b)^3$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a(a+b)^3+b(a+b)^3\\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3\\ &\quad\; +ba^3+3ba^2b+3bab^2+b^3\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Nyní si všimneme schématu, které se v předchozích odvozeních objevuje a použijeme ho na odvození vzorce pro $(a+b)^5$. Ze vzorce pro $(a+b)^4$ vezmeme koeficienty $1, 4, 6, 4, 1$, napíšeme je dvakrát pod sebe, řádky sečteme

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} \tag{17.1}$$

a napíšeme vzorec

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Úkol. Odvoďte vzorec pro $(a+b)^6$.

Ve vztahu (17.1) se opakuje stejný řádek. Můžeme opakování vynechat, když napíšeme čísla dolního řádku do mezer horního řádku a sečteme vždy číslo vlevo nahoře s číslem vpravo nahoře.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Takhle můžeme pokračovat

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array} \tag{17.2}$$

Pravděpodobně poznáváte konstrukci tzv. Paskalova trojúhelníku.

Úkol. Pokračujte v konstrukci Paskalova trojúhelníku a odvoďte vzorec pro $(a+b)^{11}$.

17.1 Kombinační čísla

Paskalův trojúhelník nám pomůže odvodit vzorec $(a+b)^n$ v případě, že známe hodnotu čísla n. V tomto článku odvodíme vzorec pro čísla Paskalova trojúhelníku. Zatím je označíme $P(n, m)$. Paskalův trojúhelník pak napíšeme pomocí těchto symbolů ve tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & P(1,0) & & P(1,1) & & & \\ & & P(2,0) & & P(2,1) & & P(2,2) & & \\ & P(3,0) & & P(3,1) & & P(3,2) & & P(3,3) & \\ P(4,0) & & P(4,1) & & P(4,2) & & P(4,3) & & P(4,4) \end{array} \tag{17.3}$$

Symbol $P(n,m)$ zde označuje koeficient ve výrazu $(a+b)^n$ u členu $a^{n-m}b^m$.

Co o těchto koeficientech víme? Víme jak zkonstruovat další řádek Paskalova trojúhelníku, tedy víme, že $P(n+1,m) = P(n,m-1) + P(n,m)$ pro $m = 1,\ldots,n-1$. Pro $m = 0$ víme $P(n,0) = 1$ a totéž víme pro $m = m$: $P(n,n) = 1$.

Výsledek následující úlohy nám pomůže vyjádřit $P(n,m)$ pomocí kombinačních čísel.

Úloha. Ukažte, že pro $n,k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, $k \geq 1$ platí

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{17.4}$$

Řešení úlohy. Kombinační čísla vyjádříme pomocí faktoriálů

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

a protože je budeme sčítat, uvedeme je na společného jmenovatele

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} &= \frac{n!k}{k!(n-k+1)!}\\ \binom{n}{k} &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}\end{aligned}$$

a sečteme

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

a ve výsledku poznáme zápis kombinačního čísla $\binom{n+1}{k}$ pomocí faktoriálů.

Podívejme se nyní na Paskalův trojúhelník (17.3) a následující trojúhelník.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \tag{17.5}$$

Víme, že platí $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, tedy oba trojúhelníky mají na krajích jedničky. Čísla uvnitř jsou z krajních čísel postupně počítány stejným způsobem, proto se také shodují. Odvodili jsme tedy vztah $P(n,m) = \binom{n}{m}$ a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots \binom{n}{n}b^n$$

17.2 Paskalův trojúhelník a kombinatorika

Tento článek s binomickou větou souvisí jen volně a čtenář jej může s klidem přeskočit. Chceme se jen zmínit, jak souvisí kombinační čísla v kombinatorice s Paskalovým trojúhelníkem. Pravděpodobně víte, že číslo $\binom{n}{k}$ označuje počet způsobů, jakým lze z n prvků vybrat k prvků.

Začneme případy $\binom{n}{0}$ a $\binom{n}{n}$. Žádný prvek vybereme jedním způsobem a všech n prvků také jedním způsobem.

Vysvětlíme význam rovnosti (17.4). Vezmene libovolný prvek. Ten do souboru dát můžeme a nemusíme. V případě, že ho do souboru dáme, máme celkem $\binom{n-1}{k-1}$ možností, jak ho doplnit na soubor k prvků. V případě, že ho do souboru nedáme, máme celkem $\binom{n-1}{k}$ možností, jak vybrat k prvků ze zbývajících prvků. Odtud plyne vztah (17.4).

K zamyšlení. Rozmyslete si, že jsme v tomto článku vlastně *dokázali* vztah o kombinacích bez opakování. Vy jste ho na střední škole možná jen dostali jako vzorec k používání. Pokud jste ho odvozovali, tak pravděpodobně jiným a asi i jednodušším způsobem.

17.3 Příklady na použití binomické věty

Příklad. V kapitole o posloupnostech se nám hodí nerovnost $(1+x)^n > nx$ pro $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$.

Uvedené tvrzení snadno dokážeme pomocí binomické věty. Uvědomíme si, že v rozvoji

$$(1+x)^n = 1 + nx + \cdots$$

jsou pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ přítomny vždy alespoň první dva členy a ostatní členy jsou kladné. Jejich vypuštěním dostaneme nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

ze které ještě vypustíme jedničku a dostaneme

$$(1+x)^n > nx$$

Příklad. Užitím binomické věty odvodíme pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ nerovnost

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \leq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} \tag{17.6}$$

Pravou stranu můžeme pomocí sumačního znaku $\sum$ zapsat $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$. Na samostatném řádku tento zápis vypadá malinko jinak

$$\sum_{k=0}^{k=n} \tfrac{1}{k!}.$$

Odvození přebíráme z [2], příklad 3.2.7.

Věnujme se nyní odvozování nerovnosti (17.6). Užitím binomické věty dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}1^{n-1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}1^{n-2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}1^{n-3}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

Dosadíme sem

$$\begin{aligned} 1^n = 1^{n-1} = 1^{n-2} = 1^{n-3} &= 1 \\ n^0 &= 1 \\ \binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{n}{1} &= n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \end{aligned}$$

a dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots \tag{17.7}$$

Nyní upravíme

$$\begin{aligned}
n\frac{1}{n} &= 1 \\
\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\frac{1}{3!} &= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)
\end{aligned}$$

Dosazením do (17.7) dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \tag{17.8}$$

Úkol. Ukažte, že další člen v (17.8) je $\frac{1}{4!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})$

Nyní si stačí uvědomit, že všechny závorky na pravé straně (17.8) mají hodnotu v intervalu $(0,1)$, odtud plyne

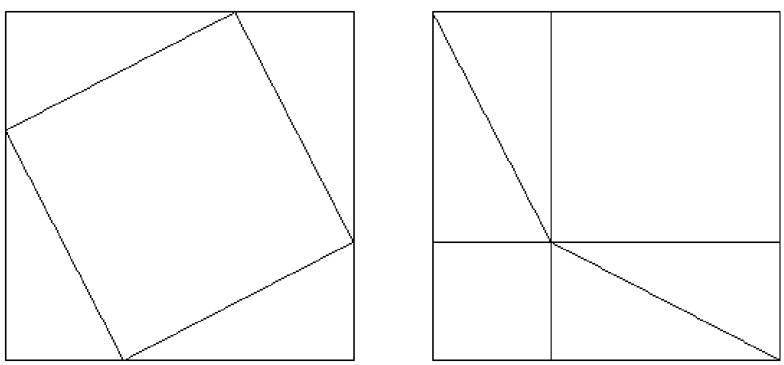
$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{n} &< 1 \\
\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) &< 1
\end{aligned}$$

a odtud (17.6).

Kapitola 18

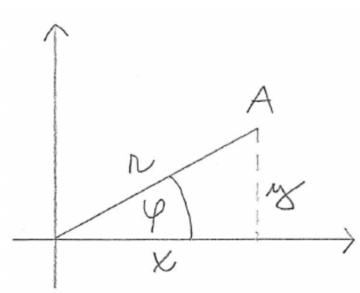
Dodatek – Pythagorova věta

Na obrázku jsou dva shodné čtverce rozdělené dvojím způsobem na čtverce a trojúhelníky. Všimněte si, že trojúhelníky jsou shodné a jsou pravoúhlé. Dále si všimněte, že porovnáním obsahů dvou takto rozdělených shodných čtverců dostaneme Pythagorovu větu.



Kapitola 19

Dodatek – polární souřadnice

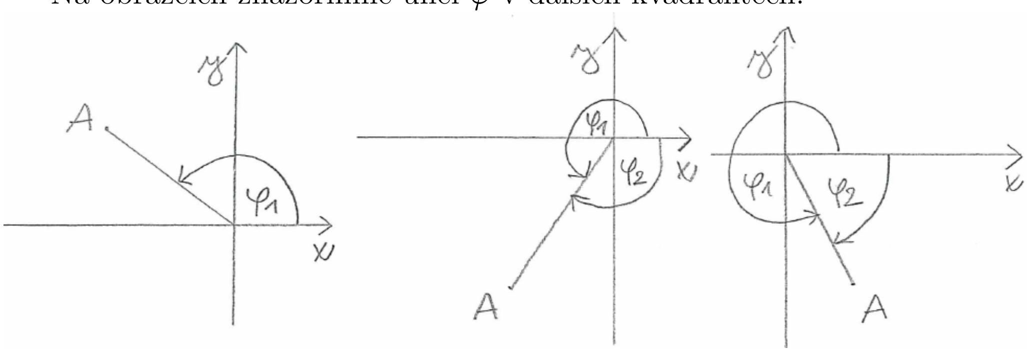


Polární souřadnice bodu A jsou definovány geometricky: r jako vzdálenost bodu A od počátku a φ jako úhel orientovaný od kladné poloosy x proti směru hodinových ručiček k průvodiči bodu A.

Z pravoúhlého trojúhelníku odvodíme vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi pro bod A v prvním kvadrantu

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \tag{19.1}$$

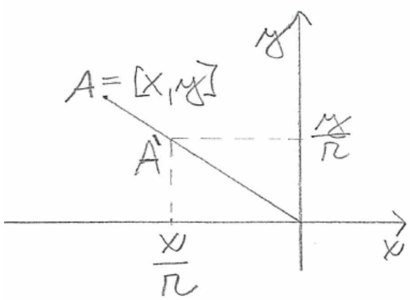
Na obrázcích znázorníme úhel φ v dalších kvadrantech.



Souřadnice φ nabývá podle výše uvedené definice (úhel orientovaný od kladné poloosy x proti směru hodinových ručiček k průvodiči bodu A) hodnot $\varphi \in [0, 2\pi)$ – tomu odpovídají úhly φ_1. Ve výpočtech je možné použít úhel lišící se o celistvý násobek 2π, například $\varphi_1 - 2\pi$, což je až na znaménko úhel φ_2. Záporné znaménko odpovídá opačné orientaci úhlu.

Potřebujeme-li například pracovat s polorovinou $x > 0$, hodí se zvolit $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ukážeme, že vztahy (19.1) platí ve všech kvadrantech s výjimkou bodu $O = [0, 0]$, pro který je $r = 0$ a φ není definováno.



Na obrázku je kromě bodu $A = [x, y]$ znázorněn bod $A' = [x/r, y/r]$, který leží na jednotkové kružnici. Odtud dostaneme $x/r = \cos\varphi$, $y/r = \sin\varphi$ a odtud platnost (19.1).

Napišme ještě vztahy mezi dvojicí (x, y) a (r, φ)

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \tag{19.2}$$

Inverzní vztahy jsou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a φ vyjádřené ze vztahu $\operatorname{tg}\varphi = y/x$. Uvedeme jedno možné vyjádření a pod ním k němu komentář.

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x) & x < 0 \\ \pi/2 & x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 \text{ (nebo } 3\pi/2) & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Funkce arctg je inverzní k funkci tg na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, tomuto intervalu pro φ odpovídá polorovina $x > 0$.

Bod $A = [x, y]$ v polorovině $x < 0$ je souměrně sdružený podle počátku s bodem $A' = [-x, -y]$. Zároveň je $(-y)/(-x) = y/x$ a úhly příslušné bodům A, A' se liší o π.

Na kladné poloose y je $\varphi = \pi/2$. Na záporné je buď $\varphi = 3\pi/2$ nebo $\varphi = -\pi/2$.

Pro počátek, tedy $x = y = 0$, není φ definováno.

Úloha. Znázorněte graficky výše uvedené úvahy: bod A, A' a jim příslušné úhly φ; bod na kladné poloose y a jemu příslušný úhel; bod na záporné poloose a jemu příslušný úhel.

19.1 Parametrické rovnice kružnice

Parametrické rovnice kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem R dostaneme dosazením poloměru za souřadnici r a parametru za souřadnici φ do (19.2)

$$x = R\cos t \qquad y = R\sin t \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{19.3}$$

Přičteme-li k pravým stranám rovnic v (19.3) souřadnice bodu $S = [x_S, y_S]$, dostaneme parametrické rovnice kružnice posunuté o vektor $\overrightarrow{OS}$, tedy kružnice se středem S a poloměrem R

$$x = x_S + R\cos t \qquad y = y_S + R\sin t \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{19.4}$$

Úloha. Parametr t v (19.3), (19.4) má význam úhlu. Načrtněte kružnici se středem S mimo počátek a zvolte na ní bod X. Do obrázku dále zakreslete pravoúhlý trojúhelník s přeponou XS a odvěsnami rovnoběžnými se souřadnými osami. Do tohoto pravoúhlého trojúhelníku dokreslete úhel o velikosti t a odvoďte vztahy (19.4).

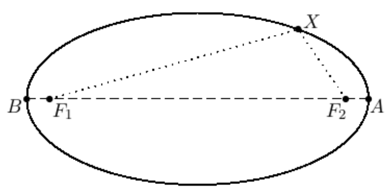
Úloha. Zvolte hodnotu úhlu φ a načrtněte křivku o parametrických rovnicích

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad r \in [0, +\infty)$$

Kapitola 20

Dodatek – rovnice kuželoseček

20.1 Rovnice elipsy



Elipsa je množina bodů v rovině, které mají součet vzdáleností od dvou daných bodů F_1, F_2 roven danému číslu $2a$. Body F_1, F_2 nazýváme ohnisky elipsy. Formálně zapsáno je elipsa množina

$$\{X : |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$$

Označíme-li vzdálenost ohnisek $2e$ a umístíme-li ohniska v kartézské soustavě na osu x: $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, dostaneme rovnici elipsy

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \tag{20.1}$$

Úloha. Odvoďte z (20.1) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1 \tag{20.2}$$

Nápověda. Nejdříve odstraňte úpravami z (20.1) odmocniny. Dostanete rovnici

$$((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2) = (2a^2 - x^2 - e^2 - y^2)^2,$$

kterou přirozenými úpravami převedete na (20.2).

Poznámka. Číslo e nazýváme *excentricitou* elipsy a je rovno polovině vzdálenosti ohnisek elipsy. Číslo a je velikost hlavní poloosy, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ je velikost vedlejší poloosy elipsy.

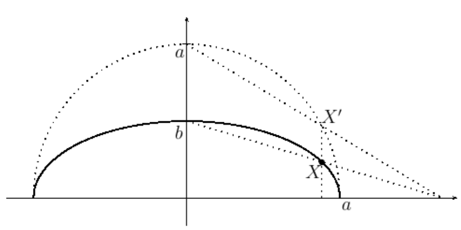
Úloha. Načrtněte trojúhelník o vrcholech ve středu elipsy S, ohnisku F a vedlejším vrcholu C. Zdůvodněte, že je pravoúhlý a jeho odvěsny mají velkost b a e. Dále zdůvodněte, že jeho přepona má velikost a, a odtud odvoďte rovnici $b^2 + e^2 = a^2$.

Návod. Načrtněte elipsu, její ohniska, spojte je úsečkou, načrtněte osu této úsečky a označte ji o. Uvědomte si, že elipsa je souměrná podle osy o a že na ose o leží vedlejší vrcholy elipsy, označte je C, D. Zdůvodněte, že oba vedlejší vrcholy mají od ohnisek vzdálenost a: $|CF_1| = |CF_2| = |DF_1| = |DF_2| = a$.

20.2 Parametrické rovnice elipsy

Do rovnice elipsy (20.2) dosadíme $b^2 = a^2 - e^2$ a vynásobíme a^2. Dostaneme

$$x^2 + (ay/b)^2 = a^2 \tag{20.3}$$



Zvolíme na elipse bod $X = [x, y]$ a sestrojíme k němu bod $X' = [x, ay/b]$.

Z rovnice (20.3) plyne, že bod X' leží na kružnici o poloměru a. Tuto kružnici nazýváme vrcholovou kružnicí elipsy a její parametrické rovnice jsou

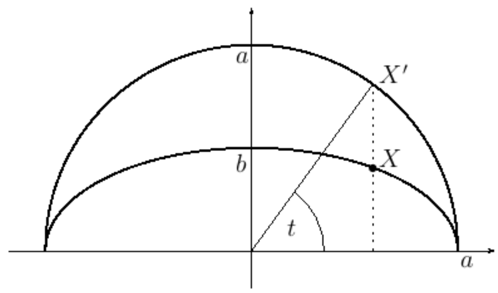
$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Dosazením ay/b za y dostaneme parametrické rovnice elipsy

$$x = a\cos t \qquad ay/b = a\sin t \qquad t \in [0, 2\pi)$$

a po úpravě

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{20.4}$$

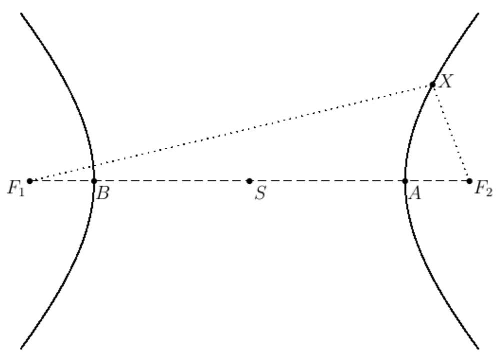


Na obrázku je znázorněn úhel t odpovídající bodu X elipsy.

Úloha. Vyjádřete $\cos t$ a $\sin t$ z (20.4) a dosaďte do vztahu $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Dostanete rovnici $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

20.3 Geometrická rovnice hyperboly

Geometricky je hyperbola definovaná jako množina bodů, jejichž vzdálenost od dvou pevně daných bodů nazývaných ohniska se liší o pevně danou hodnotu.



Ohniska označíme F_1, F_2, vzdálenost bodu X od ohnisek označíme $|XF_1|$, $|XF_2|$.

Hyperbola má dvě větve. Pro body X ležící na jedné z větví platí

$$|XF_1| - |XF_2| = C,$$

pro body na druhé z nich platí $-|XF_1| + |XF_2| = C$.

Body, ve kterých hyperbola protíná přímku F_1F_2, nazýváme vrcholy hyperboly. Na obrázku jsme je označili A, B.

Rozmyslete si, že konstanta C je rovna vzdálenosti $|AB|$. Úsečku AB nazýváme osou hyperboly, její střed S středem hyperboly a vzdálenost středu S od vrcholu A či B nazýváme poloosou hyperboly a velikost poloosy značíme a. Pro velikost osy pak platí $|AB| = 2a$.

Pomocí absolutní hodnoty popíšeme hyperbolu jako množinu bodů X splňujících rovnici $||XF_1| - |XF_2|| = 2a$, formálně zapsáno

$$\{X : ||XF_1| - |XF_2|| = 2a\}.$$

Umístíme-li střed S do počátku soustavy souřadné a ohniska do bodů $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, dostaneme rovnici

$$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a, \tag{20.5}$$

kterou upravíme stejným způsobem jako v případě elipsy. Při úpravách dvakrát umocňujeme, při prvním umocňování se ztratí absolutní hodnota, při druhém se ztratí znaménko minus mezi odmocninami, a proto formálně vyjde stejná rovnice jako v případě elipsy, tedy rovnice (20.2). Jediný rozdíl je, že vrcholy hyperboly leží mezi ohnisky, a tedy excentricita je větší než poloosa, proto označíme $b^2 = e^2 - a^2$ a rovnice hyperboly má tvar.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{20.6}$$

20.4 Parametrické rovnice hyperboly

Úloha. Z níže uvedených rovnic vyjádřete $\cosh t$ a $\sinh t$ a dosaďte do $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Jakou křivku parametrické rovnice popisují?

$$x = a \cosh t \qquad y = b \sinh t \qquad t \in \mathbb{R} \tag{20.7}$$

Hlavní body řešení. Po dosazení vyjde rovnice (20.6), tedy rovnice hyperboly. Z výše uvedených parametrických rovnic plyne $x \in [a, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}$, a tedy (20.7) popisují větev hyperboly v polorovině $x > 0$.

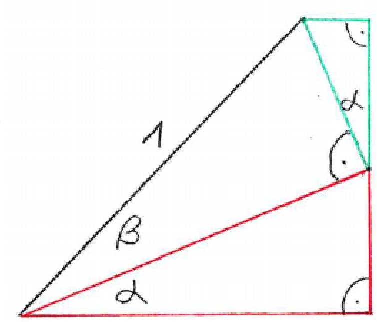
Větev v polorovině $x < 0$ popíšeme rovnicemi

$$x = -a \cosh t \qquad y = b \sinh t \qquad t \in \mathbb{R} \tag{20.8}$$

Z rovnic (20.7), (20.8) je odvozen název hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus.

Kapitola 21

Dodatek – odvození součtových vzorců



Na obrázku jsou tři pravoúhlé trojúhelníky.

Trojúhelník vlevo nahoře má přeponu délky jedna a odvěsny délek $\sin\beta$, $\cos\beta$.

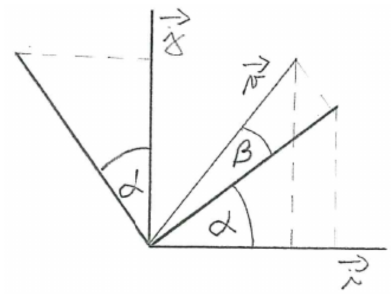
Červený trojúhelník má přeponu délky $\cos\beta$ a odvěsny délek $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$.

Zelený trojúhelník má přeponu délky $\sin\beta$ a odvěsny délek $\sin\alpha\sin\beta$, $\cos\alpha\sin\beta$.

Všimněme si ještě přepony délky jedna. U jejího dolního vrcholu je úhel o velikosti $\alpha+\beta$, můžeme ji tedy doplnit na pravoúhlý trojúhelník s úhlem této velikosti. Jeho odvěsny pak podle obrázku poskládáme z odvěsen menších trojúhelníků a dostaneme součtové vzorce.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{21.1}$$

Výhoda uvedeného odvození je, že je čistě geometrické. Nevýhoda je, že způsob nakreslení trojúhelníků v obrázku není snadno zapamatovatelný. Použijeme-li definici goniometrických funkcí na jednotkové kružnici a k popisu použijeme geometrické vektory a znalosti lineární algebry, dostaneme stejný obrázek přirozeným způsobem.



Na obázku jsou úsečkami vyznačené vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$. Jejich otočením o úhel α vzniknou vektory $\vec{i}'$, $\vec{j}'$. Z pravoúhlých trojúhelníků odvodíme lineární kombinace

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha \\ \vec{j}' &= -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha \end{aligned} \tag{21.2}$$

Vektor $\vec{v}$ vznikne otočením vektoru $\vec{i}'$ o úhel β

$$\vec{v} = \vec{i}'\cos\beta + \vec{j}'\sin\beta \tag{21.3}$$

Dosazením (21.2) do (21.3) a po úpravě dostaneme

$$\vec{v} = \vec{i}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \vec{j}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \tag{21.4}$$

Vektor $\vec{v}$ dostaneme také otočením vektoru $\vec{i}$ o úhel $\alpha + \beta$, a tedy

$$\vec{v} = \vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}\sin(\alpha+\beta) \tag{21.5}$$

Protože jsou vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$ lineárně nezávislé, je vyjádření v (21.4), (21.5) jednoznačné a odtud dostaneme porovnáním koeficientů součtové vzorce.

Úloha. Načrtněte obdobné trojúhelníky jako výše k odvození vzorců

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{21.6}$$

Úloha. Odvoďte následující vztahy z (21.1) a vyjádřete z nich $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$. Liší se odvozené vzorce od (21.6)?

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos(\alpha-\beta)\cos\beta + \sin(\alpha-\beta)\sin\beta \\ \sin\alpha &= \sin(\alpha-\beta)\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)\sin\beta \end{aligned} \tag{21.7}$$

NÁPOVĚDA. Do (21.1) dosaďte $\alpha-\beta$ za α.
Na (21.7) se dívejte jako na soustavu lineárních rovnic s neznámými $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, napište ji v maticovém tvaru a vyřešte Cramerovým pravidlem.

Kapitola 22

Dodatek – komplexní čísla

22.1 Algebraický tvar kompexního čísla

Algebraický tvar komplexního čísla je $z = x + iy$. Číslo x nazýváme *reálnou částí* čísla z, číslo y *imaginární částí* čísla z. Komplexní čísla znázorňujeme v rovině, nazýváme ji *komplexní rovinou* nebo též *Gaussovou rovinou.*

Je-li $z = x + iy$ komplexní číslo zapsané v algebraickém tvaru, nazýváme číslo $\overline{z} = x - iy$ číslem *komplexně sdruženým* číslem k číslu z.

Všimněte si, že číslo z a číslo k němu komplexně sdružené $\overline{z}$ mají stejné reálné části a jejich imaginární části se liší znaménkem.

Pro reálná čísla platí $z = \overline{z}$ a platí to jen pro reálná čísla. Jinými slovy vztah $z = \overline{z}$ přesně charakterizuje relná čísla. Ještě jinak řečeno, podmínka $z = \overline{z}$ je nutná a postačující pro to, aby z bylo reálné číslo.

Úloha. Pro komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ vypočtěte komplexně sdružené číslo jejich součinu $\overline{z_1 z_2}$ a součin čísel k nim komplexně sdružených $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ a ukažte, že se rovnají.
Rozmyslete si, že totéž platí pro součet.

Výše uvedená vlastnost platí i pro součin více čísel. Pro součin tří čísel dostaneme

$$\overline{z_1 z_2 z_3} = \overline{(z_1 z_2) z_3} = \overline{z_1 z_2}\,\overline{z_3} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}$$

Podobně matematickou indukcí pro součin n čísel dostaneme

$$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\cdots\,\overline{z_n}$$

V případě stejných čísel – označíme je z – dostaneme $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

22.2 Polynomy a jejich kořeny

Úloha. Ukažte, že pro polynom s reálnými koeficienty $a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ a jeho kořen z_1 je $\overline{z_1}$ také kořenem tohoto polynomu.

NÁVOD. Rozmyslete si, že pro polynom s reálnými koeficienty je $\overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4}$ rovno $a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + a_3\overline{z}^3 + a_4\overline{z}^4$.

Úlohy. Ukažte, že součet a součin komplexně sdružených čísel je reálné číslo.
NÁVOD: pro $z = x + iy$ vypočtěte $z + \overline{z}$ a $z\overline{z}$.
Ukažte, že pro komplexně sdružené kořeny z_1, z_2 má po roznásobení součin kořenových činitelů $(z - z_1)(z - z_2)$ reálné koeficienty.

22.3 Goniometrický tvar komplexního čísla

Zavedením polárních souřadnic v rovině získáme *goniometrický tvar* komplexního čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Nezáporné reálné číslo r nazýváme *absolutní hodnotou* komplexního čísla[1] z. Číslo φ nazýváme *argumentem* čísla z. Všimněte si, že argument komplexního čísla není zadán jednoznačně, jednotlivé hodnoty se liší o celočíselný násobek čísla 2π.

Úloha. Vyjádřete čísla $1 - i$, $2i$, $\sqrt{3} + i$, -1, 0 v goniometrickém tvaru.

Úlohy. Ukažte, že číslo z a číslo k němu komplexně sdružené $\overline{z}$ mají stejnou absolutní hodnotu.
Ukažte, že argumenty čísla z a čísla k němu komplexně sdruženého se liší znaménkem.
Ukažte, že součin $z\overline{z}$ je roven druhé mocnině absolutní hodnoty čísla z.

Úloha. Vypočtěte součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru a ukažte, že absolutní hodnota součinu je rovna součinu absolutních hodnot a argument součinu je roven součtu argumentů.

ŘEŠENÍ. Roznásobíme-li závorky

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

dostaneme

$$r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\cos\varphi_2),$$

[1]Rozmyslete si, že pro $z \in \mathbb{R}$ vyjde tato „komplexní“ absolutní hodnota stejně jako v reálném případě.

což použitím součtových vzorců upravíme na

$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Úloha. Zvolte si dvě komplexní čísla, zobrazte je v komplexní rovině a pak sestrojte jejich součin. Sestrojený součin porovnejte s vypočteným.

NÁVOD. Použijte předchozí úlohu. K sestrojení úsečky o velikosti $r_1 r_2$ použijte podobnost trojúhelníků.

Úloha. Nalezněte všechna komplexní čísla, jejichž osmá mocnina je rovna jedné.

NÁVOD. Nejdříve si rozmyslete, jak geometricky získáte osmou mocninu komplexního čísla. Kde zvolíte kompelxní číslo, aby jeho osmá mocnina byla rovna jedné?

Kapitola 23

Změny v textu po 8. únoru 2019

8. 2. 2019 – opraven důkaz kruhem v kap. 9 (ex. derivace $\rightarrow$ spojitost $\rightarrow$ ex. derivace)

Literatura

[1] Jindřich Bečvář and Martina Bečvářová. Vývoj matematiky jako popularizující stimul.
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/oppa/matematika_stimul_blok.pdf.

[2] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.

[3] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy ii.
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/MA/MA2/Vesely_II.pdf.

[4] Jiří Veselý. Úvod do komplexní analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma12-13/TUL/KOMPL/kompl_upr_lib.pdf.

Rejstřík