

Úlohy z exponenciálních a logaritmických funkcí

1. Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$.
2. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit funkce $x \mapsto \exp(1/x)$, $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ na \mathbb{R} .
3. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce $x \mapsto 3^x$ má vlastní limitu v bodě $-\infty$. Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.
4. Napište definici jednostranné nevlastní limity funkce ve vlastním bodě a ukažte, že funkce $x \mapsto \log x$ má nevlastní limitu v bodě nula zprava. Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.
5. Vypočtěte limitu funkce f v bodech $\pm\infty$.

$$f : x \mapsto 3^{\frac{x^3 + \sqrt{x^6 + x^2 + 5}}{x^3 - 2}}$$

6. Vypočtěte limitu funkce v bodech $\pm\infty$.

$$x \mapsto 2^{-\frac{x^3 + \sqrt{x^6 - 3x^4 + x^3}}{x}}$$

7. Určete v kterých z bodů 0 , 1 , $-\infty$ má funkce f limitu a čemu je případně rovna.

$$f(x) = \frac{1.01^x}{x^2}$$

Bonus: čemu je rovna limita v $+\infty$?

8. Určete v kterých z bodů 0 , 1 , $+\infty$ má funkce g limitu a čemu je případně rovna.

$$g(x) = \frac{0.99^x}{x^3}$$

9. Určete definiční obor elementární funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x - 2 - x^2}}{\log(2 - x)}$$

10. Vypočtete derivaci funkce f a určete definiční obor obou funkcí: f i f' .
Lze funkce f a f' spojitě rozšířit na \mathbb{R} ?

$$f : x \mapsto \exp(-1/x^2)$$

11. Zjistěte na kterých z intervalů $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = (0, 5)$, $I_3 = (-2, 5)$, $I_4 = (-2, +\infty)$, $I_5 = \mathbb{R}$ nabývá funkce $f : x \mapsto (x^2 - x - 1) \exp(-3x)$ svého maxima a minima a určete jejich hodnoty.

12. Pro každou z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ f_2(x) &= (1+x) \exp(-x^2) \\ f_3(x) &= |1+x| \exp(-x^2) \end{aligned}$$

(a) Určete její definiční obor.

(b) Nalezněte maximální intervaly, na nichž je funkce monotonní.

Umíte některou z úloh vyřešit bez použití derivace?

13. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jeho bodě $[-1, f(-1)]$ a napište její rovnici

$$f : x \mapsto \log \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$$

14. Načrtněte grafy funkcí *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

15. Vyjádřete pomocí logaritmu funkce *hyperbolický arkus sinus* $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1}$ a *hyperbolický arkus kosinus* $\operatorname{arccosh} = (\cosh|_{[0,+\infty)})^{-1}$.

16. Vypočtete limity funkcí

$$\begin{aligned} f : x \mapsto \operatorname{cotg}(1.1^x) & \quad \text{v bodě } -\infty, \\ g : x \mapsto 2^{\operatorname{arccotg}(\log|x|)} & \quad \text{v bodě } 0. \end{aligned}$$

17. Určete definiční obor a obor hodnot funkcí

(a)

$$x \mapsto \sqrt{x} \log x$$

(b)

$$x \mapsto x \log \sqrt{x}$$

(c)

$$x \mapsto x^2 \exp(-x)$$

(d)

$$x \mapsto \exp(-x^2 + x)$$