

Úlohy z goniometrických a cyklometrických funkcí

1. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit následující funkce na \mathbb{R} .

$$\begin{array}{ll} x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x) \\ x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x^2) \\ x \mapsto (\operatorname{arctg}(1/x))^2 & x \mapsto (\operatorname{arccotg}(1/x))^2 \end{array}$$

2. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce $x \mapsto \operatorname{arccotg} x$ má vlastní limitu v bodě $+\infty$. Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.
3. Vypočtete limitu funkce f v bodě 2.

$$f : x \mapsto \sin \left(\frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^3 - 8} \right)$$

4. Vypočtete limitu funkce f v bodě 3

$$f : x \mapsto \frac{\sin((x^2 - 9)\pi) \cos((x^2 + 9)\pi)}{x^2 - 3x}$$

5. Vypočtete limity funkcí

$$f(x) = \frac{\sin(5x - x^2)}{x} \quad g(x) = \frac{1 - \cos(x^2 - 5x^3)}{x^4}$$

v bodech 0 , $+\infty$ a $-\infty$.

6. Určete definiční obor elementární funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{4-x} \sin x}{x^2 + 4x}$$

7. Určete definiční obor elementární funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sin(1-x^2) \arccos(1-x^2)}{\operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})}$$

8. Určete definiční obor funkce $f : x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x)$ a nalezněte maximální intervaly, na nichž je f monotonní. Umíte vyřešit úlohu bez použití derivace?

9. Vypočtete derivaci funkce f a určete definiční obor obou funkcí: f i f' .
Pro funkce f_2, f_3 určete intervaly monotonie.

(a)

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

(b)

$$f_2 : x \mapsto \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} - 2 \operatorname{arctg} x$$

(c)

$$f_3 : x \mapsto \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$$

10. Určete definiční obory a obory hodnot elementárních funkcí.

$$x \mapsto \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} \quad x \mapsto \arcsin \sqrt{1 + x} \quad x \mapsto \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{x + 1}$$

11. Vypočtete za použití lineární aproximace funkcí přibližné hodnoty čísel a poté přibližné hodnoty porovnejte s přesnými hodnotami.

$$\operatorname{tg} 0.2, \quad \arcsin(1 - \sqrt{0.9}), \quad \sqrt{3.9} \arcsin 0.1, \quad \frac{\cos 0.3}{1.2}.$$

- 12a Řešte následující rovnice na intervalu $(-\pi, 5\pi/2]$. Nepoužívejte kalkulačku. Výsledky napište pomocí hodnot cyklometrických funkcí.

(a) $\sin x = 0.9$

(b) $\cos x = -0.1$

(c) $\operatorname{tg} x = -5$

(d) $\operatorname{cotg} x = 2$

(e) $\cos(2x) = 0.6$

(f) $\cos(5 - 2x) = 0.3$

12. Načrtněte grafy funkcí a vysvětlete, jak jste k nim došli. Nevíte-li si rady, nechte grafy vykreslit (třeba za použití WolframAlpha) a přemýšlejte nad nimi.

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \sin(\arcsin x) & x \mapsto \arcsin(\sin x) & x \mapsto \cos(\arcsin x) \\ x \mapsto \arcsin(\cos x) & x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \\ x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x) & \end{array}$$

13. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí \sin , \cos , tg , cotg , \arcsin , \arccos , arctg , $\operatorname{arccotg}$,
14. Odvoďte z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici hodnoty goniometrických funkcí v bodech 0 , $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, π .
15. Odvoďte následující vzorce z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici.

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin x \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$