

## Úlohy na integrály

1. Graf funkce  $f$  je sjednocením úseček  $AB$ ,  $CD$  (krajní body do grafu funkce nepatří). Načrtněte graf funkce  $f$  a prostředky elementární geometrie vypočtěte pro  $a \in (0, 2)$  obsah obrazce

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, a), y \in (0, f(x))\}$$

Vysvětlete, proč k výpočtu obsahu nepotřebujeme znát hodnotu  $f(1)$ . Načrtněte graf funkce  $F$ , která  $a \in (0, 2)$  přiřadí výše zmíněný obsah a vypočtěte její derivaci. Je derivace definovaná ve všech bodech?

(a)

$$A = [0, 0] \quad B = [1, 2] \quad C = [1, 2] \quad D = [2, 1]$$

(b)

$$A = [0, 2] \quad B = [1, 2] \quad C = [1, 1] \quad D = [2, 3]$$

(c)

$$A = [0, 2] \quad B = [1, 0] \quad C = [1, 0] \quad D = [2, 2]$$

2. Určete přirozené definiční obory následujících funkcí. Na jednotlivých intervalech těchto oborů nalezněte k funkcím primitivní funkci a udělejte zkoušku.

(a)  $f(x) = x^3 \sin x$

(b)  $f(x) = \sqrt{x} \log x$

(c)  $f(x) = \log x$

(d)  $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

(e)  $f(x) = x^2 \cos(3x)$

(f)  $f(x) = x^3 \exp(1 - x)$

(g)  $f(x) = (2x + 3)^6$

(h)  $f(x) = (x - 1)^4 \exp x$

(i)  $f(x) = \frac{x^5}{x^2 - 3x + 2}$

(j)  $f(x) = \frac{1}{x(x-1)^3}$

3. Ukažte, že pro  $a > 0$  je funkce  $F$  je primitivní funkcí funkce  $f$  na  $\mathbb{R}$ .

$$F : x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$$

4. Ukažte, že pro  $a > 0$  je funkce  $F_1$  je primitivní funkcí funkce  $f$  na  $(a, +\infty)$  a na  $(-\infty, -a)$  a funkce  $F_2$  je primitivní funkcí funkce  $f$  na  $(-a, a)$ .

$$F_1 : x \mapsto \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} \quad F_2 : x \mapsto \frac{1}{2a} \log \frac{a-x}{x+a} \quad f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - a^2}$$

5. Ukažte, že pro interval  $I = (a, b)$ , funkci  $f$ , která má na  $I$  derivaci a nemá na  $I$  kořeny je funkce  $G$  primitivní funkcí k funkci  $g$  na  $I$ .

$$G : x \mapsto \log |f(x)| \quad g : x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$$

6. Určete definiční obor následujících funkcí a na jednotlivých intervalech definičního oboru nalezněte k funkcím primitivní funkci.

$$x \mapsto \frac{-14x^2}{(x^2 - 2)^2}$$

$$x \mapsto \frac{4}{x^2 + 2x + 5}$$

7. Vypočtete

$$(N) \int_4^5 \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} dx$$

8. Odvoďte pro  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  vzorce

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

9. Vypočtete

$$(N) \int_0^\pi \frac{2}{3 + \sin x + 2 \cos x} dx$$

10. Vypočtete primitivní funkci k funkci  $f$  na  $\mathbb{R}$  a udělejte zkoušku.

$$f : x \mapsto \sqrt{1 + 4x^2}$$

11. Převeďte substitucí následující integrál na integrál z racionální funkce.

$$(N) \int_{-2}^3 5x + \sqrt{2-x+x^2} dx$$

12. Vypočtete

(a)

$$(N) \int_1^3 \frac{2}{x-3} dx$$

(b)

$$(N) \int_0^{+\infty} x \exp(x) dx$$

(c)

$$(N) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

(d)

$$(N) \int_0^1 \frac{3x}{x^2 + 4} dx$$

(e)

$$(N) \int_0^1 \log(x) dx$$