Úlohy na integrály II

1. Vypočtěte neurčité integrály na $\mathbb{R}$

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{1+4x^3}{(1+x+x^4)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

2. Načrtněte graf funkce f a pro $x \in (0,2)$ vypočtěte prostředky elementární geometrie Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$F(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(1)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(0,2)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & t \in (0,1) \\ t & t \in (1,2) \end{cases}$$

3. Načrtněte graf funkce f a pro $x \in (-1,3)$ vypočtěte Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$F(x) = (\mathcal{R}) \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Vysvětlete, proč k výpočtu integrálu nepotřebujeme znát hodnotu $f(0)$. Vypočtěte derivaci funkce F na intervalu $(-1,3)$ – je tato derivace definovaná ve všech bodech intervalu?

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & t \in (-1,0) \\ 2-t & t \in (0,3) \end{cases}$$

4. Načrtněte množinu M, odhadněte její obsah a vypočtěte ho.

   (a)
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2x-1 \geq y \geq x^2+2x-2\}$$

   (b)
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi/2], y \in [0,\sin x]\}$$

5. Odhadněte polohu těžiště množiny z příkladu 4b a vypočtěte ji.

6. Načrtněte větev hyperboly procházející body $[0,1]$ a $[1,0]$ s asymptotami v přímkách $x=-1$, $y=-1$. Vyšrafujte „křivočarý trojúhelník“ omezený touto hyperbolou a souřadnými osami, odhadněte jeho obsah a vypočtěte ho.

7. Načrtněte oblouk paraboly $y=x^2$, $x\in[0,1]$, odhadněte jeho délku a poté ji vypočtěte.

8. Vypočtěte polohu těžiště trojúhelníku $A=[1,0]$, $B=[2,0]$, $C=[0,2]$

   (a) Jako průsečík těžnic

   (b) Pomocí integrálu

   (c) S použitím vzorce $T=\frac{1}{3}(A+B+C)$.

9. Načrtněte obrazec O, odhadněte objem tělesa vzniklého rotací obrazce okolo osy x a objem vypočtěte.

$$O=\{[x,y]\in\mathbb{R}:x\in[1,2],y\in[0,\tfrac{1}{x}]\}$$