Úlohy na číselné řady

1. Číslo mající dekadický (desetinný) periodický rozvoj $0.\overline{123}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru.

   Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou deseti.

2. Číslo mající binární (dvojkový) periodický rozvoj $0.\overline{010011}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru.

   Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou dvou.

3. Napište prvních šest cifer dekadického a binárního rozvoje zlomku $\frac{5}{7}$. Určete horní odhad chyby, které se dopustíte, když obecné číslo (nemusí to být 5/7) nahradíte jeho konečným desetinným, případně dvojkovým rozvojem o šesti cifrách za „desetinnou“ tečkou.

   Návod: horní odhad chyby získáte sečtením řad $\sum_k \frac{9}{10^k}$, $\sum_k \frac{1}{2^k}$ začínajících vhodnou hodnotou indexu k.

4. Pro členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $(\forall n \in \mathbb{N})(|a_{n+1}/a_n| \leq q)$. Ukažte, že pak platí $(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq |a_1| q^{n-1})$.

5. Sečtěte řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k}{k(k+1)(k+2)},$$

6. Použijte limitní srovnávací kritérium, divergentní harmonickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ a konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ ke zjištění konvergence řad (je možné, že pro některou z řad nelze tímto způsobem rozhodnout)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k^3+\sqrt{k^5}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k+\sqrt{k^3}}.$$

7. Uvažujme pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\beta \log k}$$

   (a) Pro jaké hodnoty α, β je splněna nutná podmínka konvergence a co odtud plyne?

   (b) Pro jaké hodnoty α, β plyne z limitního srovnávacího kritéria s harmonickou řadou divergence řady?

   (c) Pro jaké hodnoty α, β plyne z limitního srovnávacího kritéria s řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ konvergence řady?

8. Pro každou z následujících řad určete

   (a) zda je posloupnost jejích částečných součtů monotonní a určete druh monotonie

   (b) rozhodněte, zda je řada konvergentní

   (c) rozhodněte, zda je řada absolutně konvergentní

   (d) rozhodněte, zda má řada součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^3}{2^k}$$

9. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou následující řady konvergentní a pro která absolutně konvergentní. Rozepište částečný součet každé z řad.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^{3k+2}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k3^{k-4}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 2^{k+3}}$$