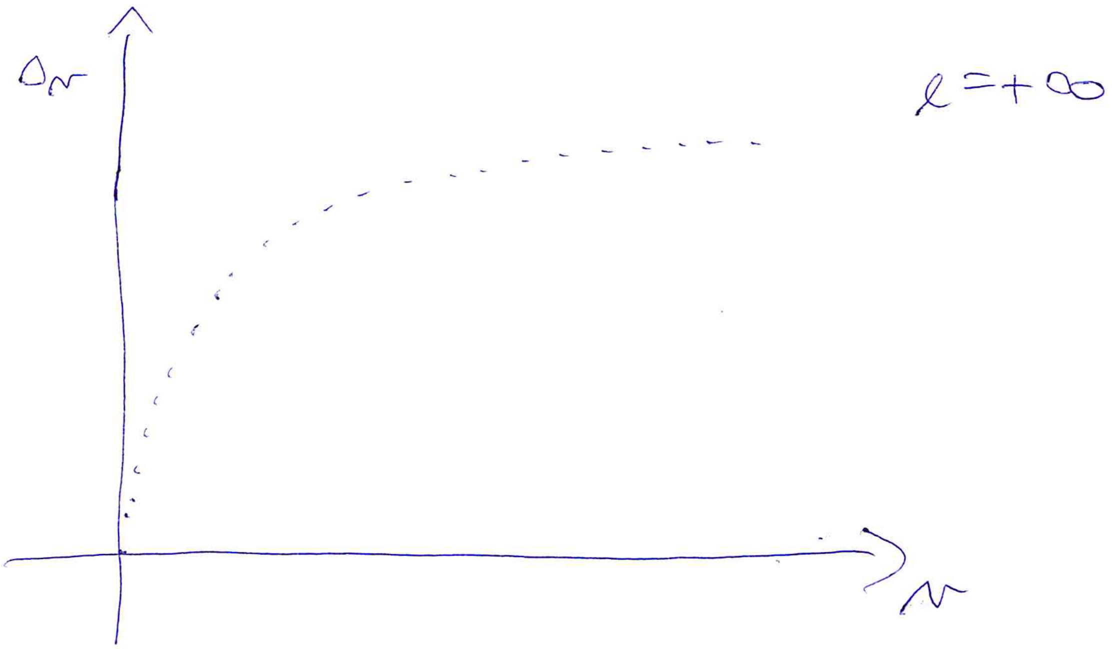
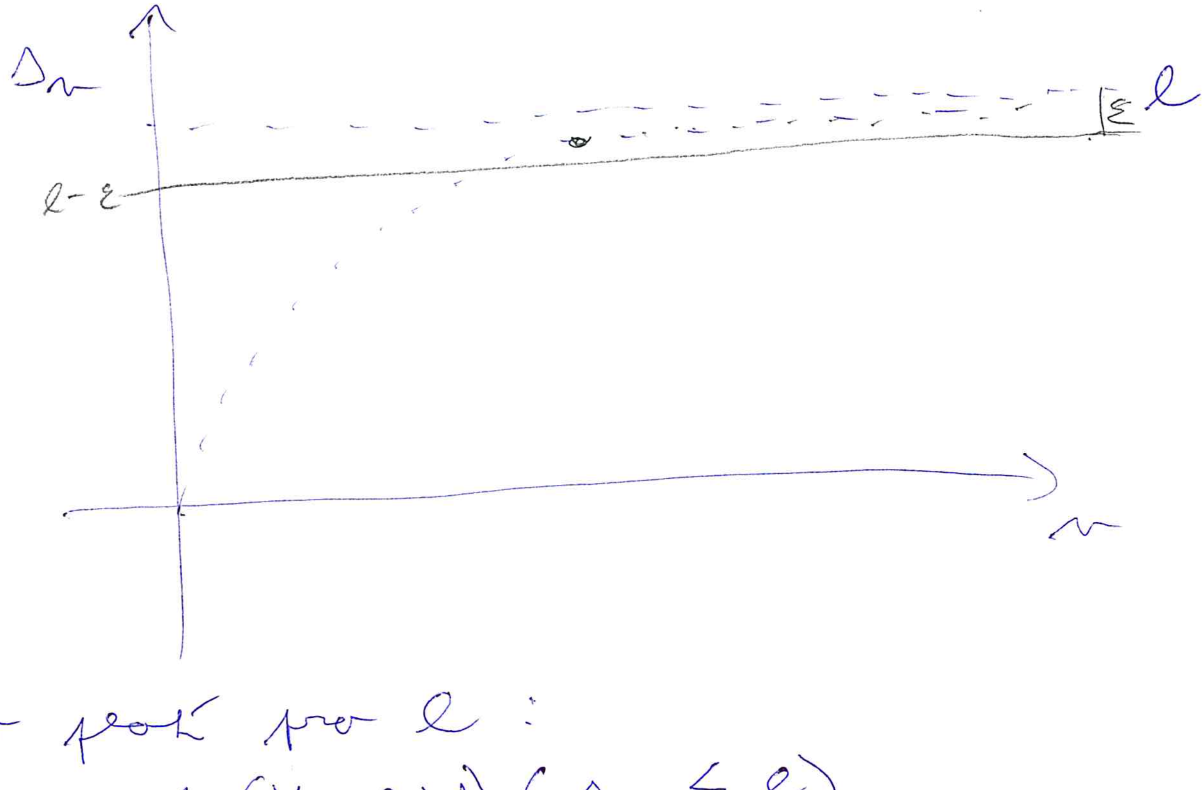
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

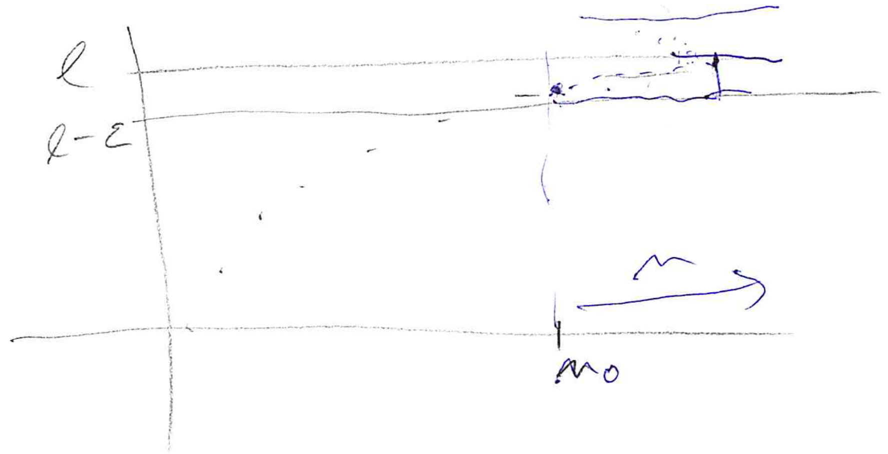


$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$



co platí pro ℓ :

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(s_n \leq \ell)$
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(s_n > \ell - \varepsilon)$



Definice: Řekneme, že číslo $l \in \mathbb{R}^*$ $(=\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$ je limitou posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, pokud platí:

A) $l \in \mathbb{R}$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) \Rightarrow (s_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon))$$

B) $l = +\infty$

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) \Rightarrow s_n > a$$

C) $l = -\infty$

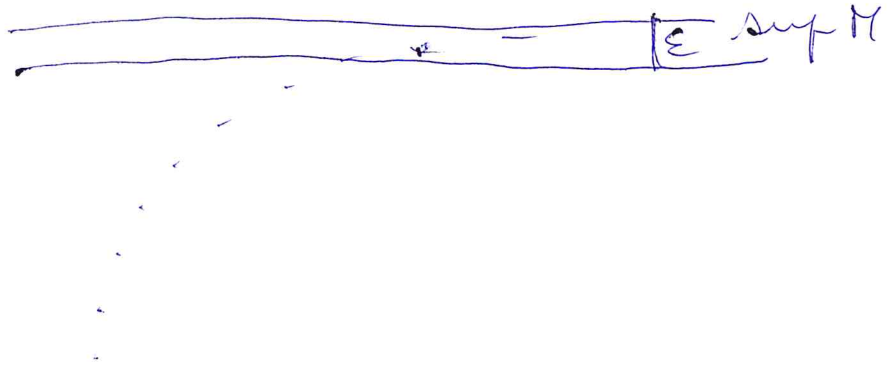
— " —

$$s_n < a$$

supremum množiny M – nejmenší horní hranice

sup M : 1) $(\forall p \in M)(p \leq \sup M)$

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(x > \sup M - \varepsilon)$



Definice: supremum množiny M je číslo s splňující

1) $(\forall p \in M)(p \leq s)$

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(x > s - \varepsilon)$

1) ... s je horní hranice množiny M

2) ... s je nejmenší horní hranice

x je „svědek" toho, že $s - \varepsilon$ není horní hranice

Na základě úlohy 3 usoudíme, že

pro $q \in (0,1)$ je $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

pro $q > 1$ je $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

$$s_n = 1 + \boxed{q + q^2 + \dots + q^{n-1}} \qquad \Big|\, q$$

$$q s_n = \boxed{q + q^2 + \dots + q^{n-1}} + q^n$$

$$s_n - q s_n = 1 - q^n$$

$q \neq 1$: $\quad$ (pro $q = 1$ je $s_n = n$)

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Definice: Součet nekonečné řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme limitu posloupnosti částečných součtů

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \quad \sim \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } q \in (0,1) \\ +\infty & \text{pro } q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & q = 0 \\ 0 & q \in (-1,0) \\ \text{neex.} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

pro $q \in (-1,1)$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Zároveň:

Pro $\boxed{q \in (-1,1)}$ je

$$1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

$$a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}$$

Nutná podmínka konvergence nekonečné řady:

Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní (tj. má konečný součet), tak platí $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Důkaz:

$$a_{k+1} = s_{k+1} - s_k$$

$$(a_1 + \cancel{a_2} + \dots + a_k + a_{k+1}) - (a_1 + \cancel{a_2} + \dots + a_k)$$

$$a_k = s_k - s_{k-1}$$

$$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} s_k &= s \\ \lim_{k\to+\infty} s_{k+1} &= s \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}$$

věta o limitě rozdílu

$$\lim (s_{k+1} - s_k) = s - s = 0$$

$$\lim a_k$$

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} > \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$$

$n \to \infty$

$$\frac{1}{2} > \Delta$$

Δ je konečné

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$$

Srovnávací kritérium