Úlohy z exponenciálních a logaritmických funkcí

14) $x \mapsto \sqrt{x} \cdot \ln(x)$

$x \geq 0$ $\quad$ $\underline{Df: (0, +\infty)}$ ok

$x > 0$

$$(\sqrt{x} \cdot \ln(x))' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \frac{(\ln(x))x + 2x}{2x\sqrt{x}} = \frac{\cancel{x}(\ln(x) + 2)}{\cancel{x}(2\sqrt{x})} = \underline{\underline{\frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}}}$$

- Vypočteme, kde je derivace nulová – zde může mít extrém.

$\ln(x) + 2 = 0 \qquad \ln(x) = -2 \qquad x > 0$ ok

$x = e^{-2}$

- Spočítáme limitu do $+\infty$, abychom věděli jak se funkce v $+\infty$ chová. ok

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \ln(x) = +\infty$$ ok

$y = \sqrt{e^{-2}} \cdot \ln(e^{-2}) \qquad y = e^{-1} \cdot (-2) = -\frac{2}{e}$

$\to$ Obor hodnot: $\underline{\langle -\frac{2}{e}, +\infty)}$ ok

18) $x \mapsto x \ln(\sqrt{x})$

$x \geq 0$ $\quad$ $\underline{\underline{Df: (0, +\infty)}}$ ok

$x > 0$

- $$(x \cdot \ln(\sqrt{x}))' = \left(\frac{x}{2} \cdot \ln(x)\right)' = \frac{2}{4} \ln(x) + \frac{\cancel{x}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\ln(x) + 1}{2}}}$$

- $\ln(x) + 1 = 0$

$\ln(x) = -1$

$x = e^{-1}$

$\underline{x = \frac{1}{e}}$

- $$y = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln(e^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{-\frac{1}{2e}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln(\sqrt{x}) = +\infty$$

$Hf: \langle -\frac{1}{2e}, +\infty)$ ok

- Stejný postup jako předchozí příklad.