4) Pokud je řada absolutně konvergentní, je vždy konvergentní.

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum_{k=} \frac{1}{k^2}$ absolutně konvergentní

kon. $\Leftarrow$ konv.

$\frac{k}{k^4} = \frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2}$ srovnávací kritérium $\rightarrow$ konverguje

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{k - 2\sqrt{k}}{k^4 + \sqrt{k^5}} \right|}_{\text{vždy} \oplus} \Rightarrow \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k - 2\sqrt{k}}{k^4 + \sqrt{k^5}} = \sum \frac{k(1 - 2k^{-\frac{1}{2}})}{k^4(1 + k^{-\frac{11}{4}})}$

$\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{k}}}{1 + \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}}} \rightarrow \lim_{k \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{k}}}{1 + \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}}} = 1$

$k - 2\sqrt{k} \geq 0$

$k^2 - 4k > 0$

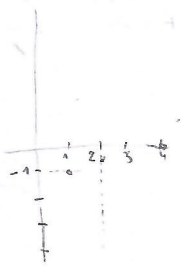
$(k-2)^2 - 4 > 0$

$k - 2\sqrt{k}$ pro $k \in \{1;2;3\}$ $k - 2\sqrt{k} < 0$

pro $k \in \{4,5,6\ldots\}$ $k - 2\sqrt{k} > 0$

Ok, ale nebylo nutné tyto úvahy provádět. Stačilo použít větu o limitě složené funkce -- vnější funkce je absolutní hodnota.

$\rightarrow$ pro velká k je $k - 2\sqrt{k} > 0$



$\varepsilon = 0{,}1$

$0{,}9 < \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{k}}}{1 + \frac{1}{k^{\frac{11}{4}}}} < 1{,}1$ $\quad 1 \cdot \frac{1}{k^3}$

$\underbrace{\frac{1}{k^3} \cdot \frac{1 - 2k^{-\frac{1}{2}}}{1 + k^{-\frac{11}{4}}}}_{\text{také konverguje}} < \underbrace{\frac{1}{k^3} \cdot 1{,}1}_{\text{konverguje}}$

také konverguje $\Leftarrow$ konverguje

absolutně konvergentní

c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{2^k}{k^{10}} \right| = \sum \frac{2^k}{k^{10}}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)^{10}}}{\frac{2^k}{k^{10}}} = \frac{2^k \cdot 2}{(k+1)^{10}} \cdot \frac{k^{10}}{2^k} = \overbrace{\frac{2 \cdot k^{10}}{(k+1)^{10}}}^{q}$ (není geometrická řada - závisí na k)

$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2 \cdot k^{10}}{(k+1)^{10}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2 \cdot k^{10}}{k^{10}(1 + \underbrace{\text{členy tvaru } \frac{1}{k^n}}_{\to 0} + 1)} = 1$

ne, limita vyjde 2

$1 - \varepsilon < \frac{2k^{10}}{(k+1)^{10}} < 1 + \varepsilon$ nelze rozhodnout, zda je řada absolutně konvergentní

d) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k^2+k}}{3^k} \right| \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$

k^2+k je vždy sudé pro $k \in \{1,2,3,\dots\}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3^{\cancel{k}+1}} \cdot \frac{\cancel{3^k}}{1} = \frac{1}{3} = q$

$q \in (-1;1) \to$ geometrická řada

absolutně konvergentní

ok