Úlohy z exponenciálních a logaritmických funkcí

1. Do jednoho obrázku načrtněte grafy *mocninných* funkcí $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x\sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$. Vysvětlete, kde a jak se na tomto grafu projeví monotonie *exponenciální* funkce.

2. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit funkce $x \mapsto \exp(1/x)$, $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ na $\mathbb{R}$.

3. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce $x \mapsto 3^x$ má vlastní limitu v bodě $-\infty$. Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.

4. Napište definici jednostranné nevlastní limity funkce ve vlastním bodě a ukažte, že funkce $x \mapsto \log x$ má nevlastní limitu v bodě nula zprava. Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.

5. Vypočtěte limitu funkce f v bodech $\pm\infty$.
$$f : x \mapsto 3^{\frac{x^3+\sqrt{x^6+x^2+5}}{x^3-2}}$$

6. Vypočtěte limitu funkce v bodech $\pm\infty$.
$$x \mapsto 2^{-\frac{x^3+\sqrt{x^6-3x^4+x^3}}{x}}$$

7. Určete v kterých z bodů 0, 1, $-\infty$ má funkce f limitu a čemu je případně rovna.
$$f(x) = \frac{1.01^x}{x^2}$$
Bonus: čemu je rovna limita v $+\infty$?

8. Určete v kterých z bodů 0, 1, $+\infty$ má funkce g limitu a čemu je případně rovna.
$$g(x) = \frac{0.99^x}{x^3}$$

9. Určete definiční obor elementární funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru
$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{\log(2-x)}$$

(*10) Vypočtěte první a druhou derivaci funkce f a určete jejich definiční obory. Lze funkce f, f', f'' spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$?

$$f : x \mapsto \exp(-1/x^2)$$

11. Zjistěte na kterém z intervalů nabývá funkce f svého maxima a minima a určete jejich hodnoty.

$$I_1 = (0,1) \quad I_2 = (0,5) \quad I_3 = (-2,5) \quad I_4 = (-2,+\infty) \quad I_5 = \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto (x^2 - x - 1)\exp(-3x)$$

12. Pro každou z funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ f_2(x) &= (1+x)\exp(-x^2) \\ f_3(x) &= |1+x|\exp(-x^2) \end{aligned}$$

   (a) Určete její definiční obor.

   (b) Nalezněte maximální intervaly, na nichž je funkce monotonní.

   Umíte některou z úloh vyřešit bez použití derivace?

13. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jeho bodě $[-1, f(-1)]$ a napište její rovnici

$$f : x \mapsto \log\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

14. Načrtněte grafy funkcí *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

(*15) Vyjádřete pomocí logaritmu funkce

   (a) *hyperbolický arkus sinus* $\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1}$

   (b) *hyperbolický arkus kosinus* $\operatorname{arccosh} = (\cosh_{|[0,+\infty)})^{-1}$

16. Vypočtěte limity funkcí

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \operatorname{cotg}(1.1^x) && \text{v bodě } -\infty, \\ g : x &\mapsto 2^{\operatorname{arccotg}(\log|x|)} && \text{v bodě } 0. \end{aligned}$$

17. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto \sqrt{x} \log x$$

18. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto x \log \sqrt{x}$$

19. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto x^2 \exp(-x)$$

20. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto \exp(-x^2 + x)$$

(*21) Zamyslete se nad tím, proč je $2^0 = 1$. Pro které základy platí $a^0 = 1$?
Proč je $2^{1/2} = \sqrt{2}$, proč je $2^{-1} = 1/2$?
A obecně: proč je $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ a $a^{-p} = 1/a^p$?
Kde je chyba v $-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$?

Doplnění: Vycházíme ze situace, kdy se naučíte pracovat s mocninami s kladným přirozeným exponentem a chcete je nějakým rozumným způsobem zobecnit na případ s reálným exponentem. Výše uvažujeme racionální exponent. Další otázka by mohla být: jaký význam dáme mocnině s exponentem $\sqrt{2}$? Například $2^{\sqrt{2}}$.