

## Úlohy z goniometrických a cyklometrických funkcí

1. Zjistěte, zda je možné následující funkce spojitě rozšířit, a pokud ano, načrtněte graf.

$$f : x \mapsto \cos \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \quad g : x \mapsto \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

2. Vypočtěte limitu funkce  $f$  v bodě 2 a v bodech  $\pm\infty$ .

$$f : x \mapsto \sin \frac{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(1 - \sqrt{2x^2 + 1})(8 - 3x^2)}{x^4 - 8x}$$

3. Vypočtěte limity funkcí  $f, g$  v bodech 0,  $+\infty$  a  $-\infty$ .

$$f : x \mapsto \frac{\sin(5x - x^2)}{x} \quad g : x \mapsto \cos \frac{\sin(5x - x^2)}{x}$$

4. Vypočtěte limitu funkce  $f$  v bodě 3 a v bodě  $+\infty$

$$f : x \mapsto \frac{\sin((x^2 - 9)\pi) \cos((x^2 + 9)\pi)}{x^2 - 3x}$$

5. Vypočtěte limitu funkce  $f$  v bodě 0 zprava a v bodě  $+\infty$ .

$$f : x \mapsto \frac{\sin(5x^2 - \sqrt{x^3})}{x(2x + 3\sqrt{x})}$$

6. Vypočtěte limity funkce  $f$  v bodech 0,  $+\infty$  a  $-\infty$ .

$$f : x \mapsto \frac{1 - \cos(x^2 - 5x^3)}{x^4}$$

7. Určete definiční obor elementární funkce  $f$  a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{4 - x} \sin x}{x^2 + 4x}$$

8. Řešte následující rovnice na intervalu  $(-\pi, 5\pi/2]$ . Nepoužívejte kalkulačku. Výsledky napište pomocí hodnot cyklometrických funkcí.

(a)  $\sin x = 0.9$

- (b)  $\cos x = -0.1$
- (c)  $\operatorname{tg} x = -5$
- (d)  $\operatorname{cotg} x = 2$
- (e)  $\cos(2x) = 0.6$
- (f)  $\cos(5 - 2x) = 0.3$

9. Napište definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě a ukažte, že funkce  $x \mapsto \operatorname{arccotg} x$  má vlastní limitu v bodě  $+\infty$ . Definici nemusíte psát pro obecný případ, stačí vhodný typ na zadaný příklad.
10. Zjistěte, zda lze spojitě rozšířit následující funkce na  $\mathbb{R}$  a případně jakou hodnotou

$$\begin{array}{ll} x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x) \\ x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2) & x \mapsto \operatorname{arccotg}(1/x^2) \\ x \mapsto (\operatorname{arctg}(1/x))^2 & x \mapsto (\operatorname{arccotg}(1/x))^2 \end{array}$$

11. Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2^{\operatorname{arccotg} x} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos(\operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1}))$$

- (\*12) Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(\sin^2 x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos \operatorname{sgn} x \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x^2 \sin^2 \frac{1}{x})$$

13. Určete definiční obor elementární funkce  $f$  a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sin(1 - x^2) \arccos(1 - x^2)}{\operatorname{arctg}(1 - \sqrt{x})}$$

14. Určete definiční obor funkce  $f : x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x)$  a nalezněte maximální intervaly, na nichž je  $f$  monotonní. Umíte vyřešit úlohu bez použití derivace?

15. Vypočtěte derivaci funkce  $f$ , určete definiční obor obou funkcí:  $f$  i  $f'$  a určete intervaly monotonie funkce  $f$ .

$$f : x \mapsto \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$$

(\*16) Pro funkce  $f_1, f_2, f_3$  vypočtete derivaci a určete definiční obor funkce i její derivace. Pro funkce  $f_1, f_2$  navíc určete maximální intervaly, na nichž je monotonní.

(a)

$$f_1 : x \mapsto \arcsin \sqrt{1 - x^2} - \arccos x$$

(b)

$$f_2 : x \mapsto \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} - 2 \operatorname{arctg} x$$

(c)

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

(\*17) Načrtněte grafy funkcí a vysvětlete, jak jste k nim došli. Nevíte-li si rady, nechte grafy vykreslit (třeba za použití WolframAlpha) a přemýšlejte nad nimi.

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \sin(\arcsin x) & x \mapsto \arcsin(\sin x) & x \mapsto \cos(\arcsin x) \\ x \mapsto \arcsin(\cos x) & x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \\ x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) & x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x) & \end{array}$$

18. Určete obraz  $f(I)$  intervalu  $I = [0, 3]$  pro funkci

$$f : x \mapsto \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$$

19. Určete definiční obor a obor hodnot elementární funkce

$$x \mapsto \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$$

20. Určete obraz  $f(I)$  intervalu  $I = [0, 2]$  pro funkci

$$f : x \mapsto \arcsin \sqrt{x - x^2}$$

21. Určete definiční obor a obor hodnot elementární funkce

$$x \mapsto \arcsin \sqrt{x - x^2}$$

\*22. Určete definiční obor a obor hodnot elementární funkce

$$x \mapsto \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{x + 1}$$

23. Vypočtete za použití lineární aproximace funkcí přibližné hodnoty čísel a poté přibližné hodnoty porovnejte s přesnými hodnotami.

$$\operatorname{tg} 0.2, \quad \arcsin(1 - \sqrt{0.9}), \quad \sqrt{3.9} \arcsin 0.1, \quad \frac{\cos 0.3}{1.2}.$$

24. Odvoďte vztahy pro derivace funkcí  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ ,  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arccotg}$ ,