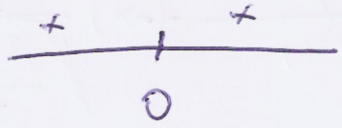
① $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{x}\right)$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot x - (x-2)\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{x^2-4x+4}{x^2}} \cdot \frac{x-x+2}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2+x^2-4x+4}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{2x^2-4x+4} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{2}{2(x^2-2x+2)} =$$

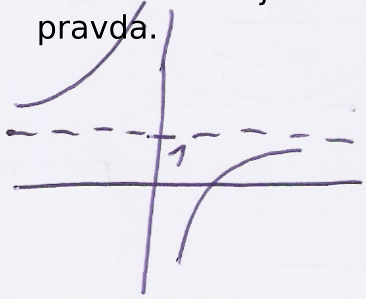
$$= \frac{1}{x^2-2x+2} = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$



INTERVALY, KDE JE FCE ROSTOUCÍ: $(-\infty; 0)$ A $(0; \infty)$

Ok.
Někteří studenti z toho usoudí, že je funkce rostoucí i na sjednocení intervalů. To ale není pravda.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{x}$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x-2}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} 1 - \frac{2}{x} = \infty$$

CELKOVÁ LIMITA NEEXISTUJE

NELZE SPOJITĚ ROZŠÍŘIT V BODĚ NULA

Jednostranné limity vnitřní funkce jsou nekonečné a nerovnají se.
Z toho ale nic neplyne o existenci limity složené funkce.
Je třeba dopočítat jednostranné limity složené funkce a teprve z nich usoudit na neexistenci limity.

1*

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad x^2+1>0$

$\qquad\qquad\quad x^2 > -1$

Zapomněl jste na arkussinus -- je třeba vyřešit dvě nerovnosti. Na výsledku to nic nezmění.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \cdot (-x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1-1}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \cdot (-x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \cdot (-x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1}}} =$$

$$= \frac{-x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\boxed{x}} = -\frac{1}{x^2+1} \neq 0$$

Tady má být absolutní hodnota z x.

R

$\oplus$ $\qquad$ $-$ k

0

ROSTOUCÍ NA INTERVALU

$(-\infty; 0)$

Ok. Jak byste to zdůvodnil bez wolframu?

V NULE JE HROT, V NULE NENÍ DERIVACE (KOUKAL JSEM NA GRAF NA WOLFRAMU)

POZN.:

KDYŽ JSEM KOUKAL NA WOLFRAM, TOTO BYLO PRO $x>0$ $-\frac{1}{x^2+1}$.

TADY TO SEDÍ, FCE JE KLESAJÍCÍ NA $(0;\infty)$.

ALE NA $(-\infty;0)$ JE ROSTOUCÍ, KDYŽ JSEM KOUKAL NA GRAF.

MÁM BRÁT TO, ŽE KDYŽ BYCH MĚL $x<0$, TOČIL BYCH ZNAMÉNKO U TÉ DERIVACE? NA $+\frac{1}{x^2+1}$?

DĚKUJI

Viz absolutní hodnota nahoře.

② $y = \dfrac{x^2-2x-3}{\ln(x-2)}$

$\ln(x-2)$

$x-2>0$

$\underline{x>2}$

$\ln(x-2)=0$

$e^0=x-2$

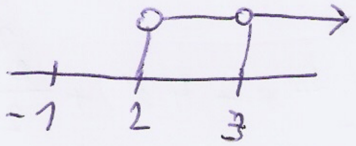
$1=x-2$

$\underline{x=3}$

x^2-2x-3

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$

$D_f=(2;3)\cup(3;\infty)$



„$\frac{0}{0}$" LH PRAVIDLO

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{\ln(x-2)}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\ln(x-2)}\cdot\lim_{x\to3}(x+1)=$$

$$=4\cdot\lim_{x\to3}\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=4\cdot\lim_{x\to3}(x-2)=4\cdot1=\underline{\underline{4}}$$

LZE SPOJITĚ ROZŠÍŘIT

POZN.: LIMITU V BODĚ 2 NEZKOUMÁM, KDYŽ TEN DANÝ BOD VŮBEC NEPATŘÍ DO DEFINIČNÍHO OBORU FCE.

Bod 3 také nepatří do definičního oboru a limitu v něm zkoumáte...

V bodě 2 funkce nemá oboustrannou limitu, ale může mít jednostrannou limitu zprava.
Výpočtem zjistíte, že je rovna nule, funkci tedy lze v bodě dva spojitě rozšířit hodnotou nula.

4

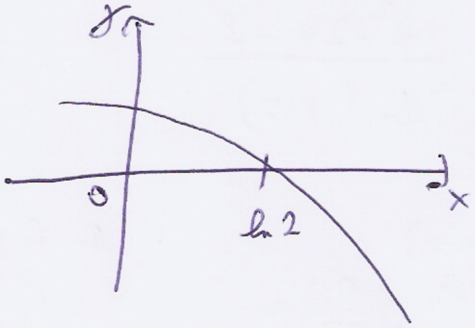
$y = 2 - e^x$

$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

$2 - e^x = 0$

$e^x = 2$

$x = \ln 2$



$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (2 - e^x)^2\,dx = \pi \int_0^{\ln 2} 4 - 4e^x + e^{2x}\,dx =$$

$$= \left[4x - 4e^x + \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2} \pi =$$

$$= \pi \left[\left(4\ln 2 - 4e^{\ln 2} + \frac{e^{2\ln 2}}{2}\right) - \left(-4 + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \left(4\ln 2 - 4\cdot 2 + 2 + 4 - \frac{1}{2}\right)\pi = \underline{\left(4\ln 2 - \frac{5}{2}\right)\pi}\ j^3$$

OTÁZKA POD ČAROU (JEN ŘEČNICKÁ...)

ČÍM BYLI NĚKTEŘÍ „ZASKOČENI", NEB „PŘEKVAPENI"?

ŽE HORNÍ MEZ NEBYLO „PĚKNÉ" ČÍSLÍČKO?

JEN SE PAK NEZAMOTAT DO VÝPOČTU PO DOSAZENÍ MEZÍ... TAKY JSEM NEJDŘÍVE POČÍTAL BLBĚ, PAK JSEM SI VŠIML CHYBKY...

Děkuji za tu poznámku. Ano, jednu studentku opravdu zmátlo to nehezké číslíčko.
A já jsem nabyla dojmu, že se asi ten příklad málo podobá zveřejněným příkladům.

Celkově chci písemku sestavit tak, aby ji měl šanci napsat student, který dobře zvládne zveřejněné příklady. Zároveň chci vyjít vstříc studentům, kteří jsou schopni vyřešit příklady mimo rámec daný zveřejněnými příklady.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{8} + \frac{4}{15} + \frac{4}{24} + \dots + \frac{4}{n(n+2)} + \dots \right)$$

$$\frac{4}{n^2+2n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \qquad / \cdot n(n+2)$$

$$4 = An + 2A + Bn$$

$$4 = n(A+B) + 2A$$

$$0 = A + B$$

$$4 = 2A$$

$$A = 2 \qquad B = -2$$

$$\frac{4}{n(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}$$

$$s_n = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) + \dots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}\right) + \dots$$

POZN.: SKORO VŠE SE VYRUŠÍ... (DOUFÁM, ŽE ANO, DĚLAL JSEM SI KONTROLU NA WOLFRAMU)

$\cancel{s_n} = 2 + 1 = 3 = s$

$s = 3$

Pozor, s_n je částečný součet: s_n = 3 + 2/n - 2/(n+2)