Požadavky ke zkoušce z AN2

29. května 2020

1. Goniometrické funkce:

   Trigonometrická definice, definice na jednotkové kružnici. Odvození součtových vzorců, odvození limity $\sin(x)/x$ v nule i v nekonečnu. Odvození vzorců pro derivace goniometrických funkcí. Souvislost limit $\sin(x)/x$, $\operatorname{tg}(x)/x$ v nule s hodnotou derivace.

2. Cyklometrické funkce:

   Definice cyklometrických funkcí, jak s jejich pomocí najdeme kořeny x rovnic $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = \operatorname{tg}(x)$, $y = \operatorname{cotg}(x)$.

   Pravidlo pro derivaci inverzní funkce a odvození vzorců pro derivace cyklometrických funkcí.

   Limity funkcí arkustangens a arkuskotangens v nekonečnech – určení hodnoty z grafu a demonstrace definice limity na grafu.

   Souvislost limit $\arcsin(x)/x$, $\operatorname{arctg}(x)/x$ v nule s hodnotou derivace.

3. Exponenciální a logaritmická funkce:

   Povídání o exponenciálním růstu, jaké nebezpečí skrývá, ilustrace na úloze o šachovnici a rýži.

   Definice exponenciální funkce: rozdíl mezi exponenciální a mocninnou funkcí, jak se počítají mocniny s racionálním exponentem (vzorce znáte všichni a pokud budete vědět i odkud se tyto vzorce vzaly, bude to váš bonus – hvězdičkový příklad číslo 21 vás vede k zamyšlení, proč to tak je.) Mocniny s iracionálním exponentem získáme z racionálních exponentů spojitým rozšířením.

   Vztah mocninné a exponenciální funkce: jak se na grafech mocninných funkcí projeví monotonie exponenciálních funkcí.

   Limita $(\exp(x) - 1)/x$ v nule a její vztah k derivaci exponenciální funkce v nule, odvození vzorce pro derivaci exponenciální funkce (bylo v prvním videu).

   Definice logaritmu (inverzní funkce k exponenciální funkci) a odvození vzorce pro derivaci logaritmické funkce.

   Limity exponenciální funkce v nekonečnech, logaritmické funkce v plus nekonečnu a v nule zprava – určení hodnoty z grafu a demonstrace definice limity na grafu.

4. Věta o limitě složené funkce, dvě verze (s/bez spojitosti vnější funkce), vysvětlení na příkladech.

5. Taylorovy polynomy funkcí sinus, kosinus a exponenciální se středem v bodě nula a logaritmické funkce se středem v bodě jedna.

6. Co je supremum a infimum množiny. Vysvětlení na limitě monotonní posloupnosti.

7. Primitivní funkce a Newtonův integrál:

   Definice primitivní funkce a zobecněné primitivní funkce, definice Newtonova integrálu.

   Věta o existenci primitivní funkce ke spojité funkci i s důkazem (zde jen hlavní myšlenky, podrobnosti u Riemannova integrálu).

   Věta o jednoznačnosti (až na aditivní konstantu) i s důkazem.

   Metoda substituce, dvě její verze (jedna požaduje inverzní funkci k substituci, druhá nikoliv) a jejich odvození z pravidla pro derivaci složené funkce.

   Metoda per partes a její odvození z pravidla pro derivaci součinu.

   Integrace racionální funkce.

8. Riemannův integrál:

   Pro jakou funkci ho definujeme (omezenou na omezeném intervalu), co je integrální součet po částech konstantní funkce, co je dolní a horní integrální součet funkce, co je dolní a horní Riemannův integrál (supremum/infimum dolních/horních integrálních součtů). Co znamená, že má funkce Riemannův integrál, Dirichletova funkce a její dolní a horní Riemannův integrál.

   Existence Riemannova integrálu ze spojité funkce, hlavní myšlenka důkazu na grafu spojité funkce.

   Derivace integrálu s proměnnou horní mezí, věta o existenci primitivní funkce ke spojité funkci i s důkazem.

9. Geometrické aplikace integrálu:

   Obsah obrazce, délka křivky, objem a povrch rotačně symetrického tělesa i s odvozením.

10. Řady:

    Základní pojmy: částečný součet řady, posloupnost částečných součtů, součet (nekonečné) řady, konvergentní, divergentní, oscilující řady. Příklad řady s konečným součtem, s nekonečným součtem a řady, která nemá součet.

    Nutná podmínka konvergence i s důkazem.

Opakování základů logiky: implikace, nutná podmínka, postačující podmínka. Monotonie posloupnosti jako postačující podmínka existence limity (viz věta v dalším odstavci).

Definice limity posloupnosti, věta o existenci limity monotonní posloupnosti, vysvětlení věty na grafu posloupnosti. Důsledek pro řady s kladnými členy (existence součtu, který může a nemusí být konečný).

Konečná a nekonečná geometrická řada, odvození vzorce pro jejich součty. Geometrická posloupnost a její limita i s důkazem (vyřešení příslušných nerovnic). Nekonečná geometrická řada a periodické rozvoje.

Harmonická řada a její divergence i s důkazem (srovnávacím kritériem, geometricky, integrálním kritériem). Konvergence řady $\sum 1/k^2$ i s důkazy (srovnávacím kritériem, geometricky, integrálním kritériem).

Limitní srovnávací a limitní podílové kritérium pro řady s kladnými členy – výklad i s hlavní myšlenkou důkazu na konkrétních příkladech.

Řada se střídavými znaménky, důkaz konvergence řady $\sum (-1)^{k+1}/k$, změna jejího součtu při přerovnání (vysvětlení na konkrétním příkladě).

Cauchyovská posloupnost. Věta o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti na množině reálných čísel. Na množině racionálních čísel věta neplatí – příklad Cauchyovské posloupnosti, která není na této množině konvergentní (např. ukončené desetinné rozvoje odmocniny ze dvou).

Absolutně konvergentní řady. Věta o konvergenci absolutně konvergentní řady – z důkazu jen hlavní myšlenka založená na trojúhelníkové nerovnosti a větě o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Věta o přerovnání absolutně konvergentní řady (při přerovnání se nezmění součet).

Integrální kritérium a jeho použití na řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ i s důkazem.