

Příklady k písemné části zkoušky z AN2
29. května 2020

1. Vypočtete limity funkcí f , g v bodech 0 , $+\infty$ a $-\infty$.

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x^3 + 4x)}{x^2 + 2x} \quad g : x \mapsto \exp\left(\frac{\sin(x^3 + 4x)}{x^2 + 2x}\right)$$

2. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1} \sin(x^2 - 3x)}{x^2 - 2x}$$

3. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru. Jakou hodnotou?

$$f : x \mapsto \frac{\arccos(x-2) \sin(x^2 - x)}{x^2 - 1}$$

4. Určete definiční obor funkce f a intervaly, na nichž je rostoucí. Dále zjistěte, zda je možné funkci f spojitě rozšířit a případně jakou hodnotou.

$$f : x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

5. Určete definiční obor a obor hodnot funkce

$$x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

6. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f : x \mapsto \arcsin(x^2 + x)$$

7. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit.

$$f : x \mapsto \exp\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)$$

8. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{\log(x+3)}$$

9. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f .

$$f : x \mapsto (x^2 + x + 1) \exp(x)$$

10. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f .

$$f : x \mapsto x^2 \log(x)$$

11. Vypočtěte integrály

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 2)^2} dx$$

12. Vypočtěte integrály

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

13. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4 - 2 \cos(x) + \sin(x)} dx$$

14. Převed'te integrál substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+3}{x}} dx$$

15. Převed'te integrál substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \sin^2(x)}{2 - \cos(x)} dx$$

16. Převed'te integrál substitucí na integrál z racionální funkce.

$$\int_0^1 \frac{1}{2x^2 + \sqrt{3+x^2}} dx$$

17. Pro funkci f a pro $x \in (0, 4]$ vypočtěte prostředky elementární geometrie integrál $R(x) = \int_0^x f(t) dt$ s proměnnou horní mezí. Výpočet zkontrolujte derivací funkce R .

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in (0, 3] \\ 1 & x \in (3, 4] \end{cases}$$

18. Vypočtete obsah obrazce shora omezeného grafem funkce f a zdola osou x . Obrazec se rozpadá na nekonečně mnoho částí, zvolte jednu z nich.

$$f : x \mapsto x \sin(x)$$

19. Vypočtete obsah obrazce shora omezeného grafem funkce f a zdola osou x . Obrazec se rozpadá na nekonečně mnoho částí, zvolte jednu z nich.

$$f : x \mapsto \cos^5(x)$$

20. Vypočtete obsah obrazce zdola omezeného grafem funkce f a shora osou x .

$$f : x \mapsto x^2 \log(x)$$

21. Vypočtete obsah obrazce shora omezeného grafem funkce f a zdola osou x .

$$f : x \mapsto (2x - x^2) \exp(x)$$

22. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací obrazce ležícího v prvním kvadrantu a shora omezeného křivkou o rovnici $(x + 1)(y + 1) = 2$ okolo osy x .

23. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací obrazce ležícího v prvním kvadrantu a shora omezeného křivkou o rovnici $y = \exp(-x)$ okolo osy x .

24. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací obrazce shora omezeného křivkou o rovnici $y = 1 - \sqrt{x}$ a zdola osou x okolo osy x .

25. Určete, co plyne z nutné podmínky konvergence a z věty o existenci limity monotonní posloupnosti pro následující řady (respektive pro jejich součty).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{\sqrt{k}+4} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{\sqrt{k^3}+3} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - \sqrt{k}}{k^3 + \sqrt{k}}$$

- 26* Určete, co plyne z nutné podmínky konvergence a z věty o existenci limity monotonní posloupnosti pro následující řady (respektive pro jejich součty)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{\sqrt{k}+4} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - \sqrt{k}}{k^3 + \sqrt{k}}$$

a zjistěte, zda je následující řada absolutně konvergentní

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{k^2 5^k}$$

27. Vypočtěte částečné součty a součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k}$$

28* Vypočtěte částečné součty a součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k}$$

a zjistěte, zda je následující řada absolutně konvergentní

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k - 3\sqrt{k}}{5k^2 + 6\sqrt{k^5}}$$

29. Vypočtěte částečné součty a součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{k-1}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

30* Vypočtěte částečné součty a součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{k-1}} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

a určete, zda má následující řada konečný součet (z čeho plyne, že má součet?)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 3\sqrt{k}}{5k^2 + 6\sqrt{k^7}}$$