Heineho věta

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která má limitu x_0 platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x_0)$.

Důkaz:

„$\Rightarrow$" $(*)$ f je spojitá v x_0 ... $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))\,(f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)))$

~~$x_0 \Rightarrow$~~

$(**)$ $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$ ... $(\forall \alpha > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > K)$

$$(x_n \in U_\alpha(x_0))$$

~~Zvolíme~~

Chceme ukázat: $\underset{n\to\infty}{f(x_n) \to f(x_0)}$ $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > K)$

$$(f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

dle $(*)$ k $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$, dle $(**)$ k $\alpha = \delta$ ex. K $\quad \square$

„$\Leftarrow$" Pokud pro každou posloupnost $x_n \to x_0$ platí

$f(x_n) \to f(x_0)$,

pak

f je spojitá v bodě x_0

nepřímý důkaz:

Pokud f není spojitá v bodě x_0,

pak

existuje posloupnost $\{x_n\}$, pro kterou

platí $f(x_n)$ nekonverguje k $f(x_0)$

(tj buď nekonverguje, nebo i může

konvergovat, ale v tom případě se

její limita je různá od $f(x_0)$)

a $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$

f není spojitá v x_0:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in U_\delta(x_0))(f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0)))$$

~~$\cancel{\varepsilon = \frac{1}{n}}$ ... $\delta > 0$ ... $x_n \in U_\delta(x_0)$ ... $f(x_n) \notin U_{1/n}(f(x_0))$~~

necháme toto ε

$$\delta = \frac{1}{n} \quad \dots \quad x_n \in U_{1/n}(x_0)$$

$$f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$$

dokážeme, že $\lim x_n = x_0$

a že neplatí $\lim f(x_n) = f(x_0)$

a) $\lim x_n = x_0$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > k)(x_n \in U_\varepsilon(x_0))$$

stačí zvolit $k =$ ~~$\frac{1}{\varepsilon}$ horní~~ $\frac{1}{\varepsilon}$ zaokrouhlené na ~~nejb~~ nahoru na celé číslo

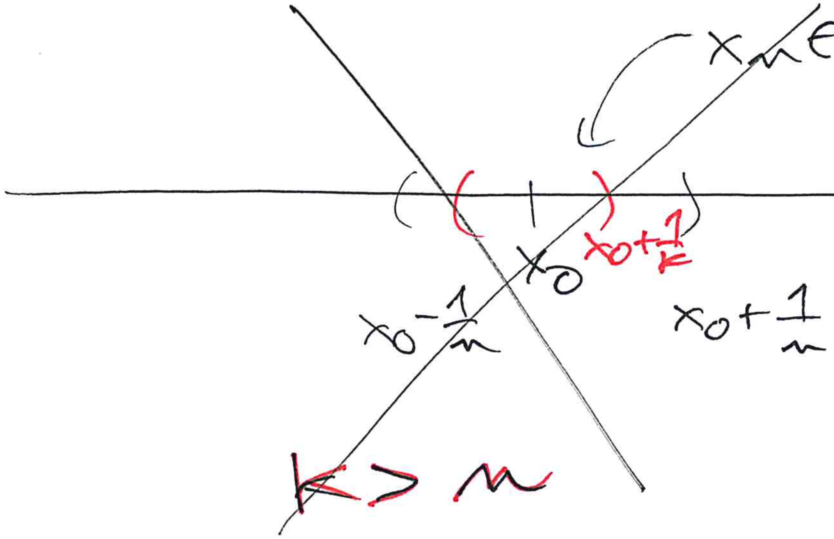
$$k = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

$k \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$\underline{\frac{1}{n} < \frac{1}{k} \leq \varepsilon}$

$\cancel{n > k}$

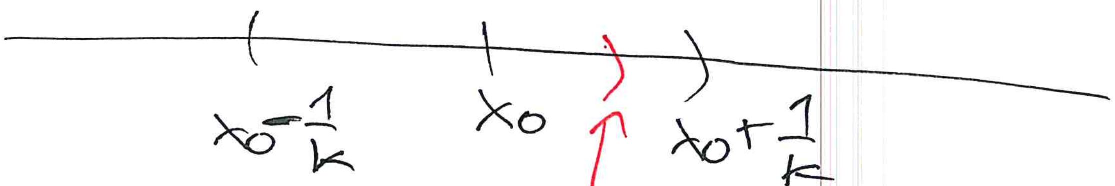
$x_n \in \mathcal{U}_{1/n}(x_0)$



$k > n$

$n > k$

$x_k \in \mathcal{U}_{1/k}(x_0)$



$x_0 + \frac{1}{n} < x_0 + \frac{1}{k}$

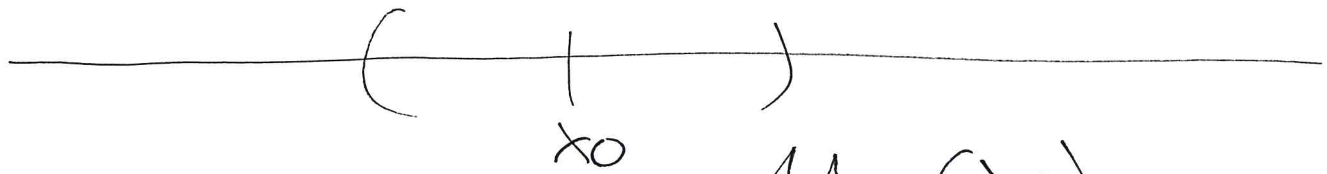
$\mathcal{U}_{1/n}(x_0) \subset \mathcal{U}_{1/k}(x_0)$

z volby $k = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

plyne $\cancel{x_0 \Rightarrow}$

$x_n \to x_0$

pro $n \to \infty$



$U_\varepsilon(x_0)$

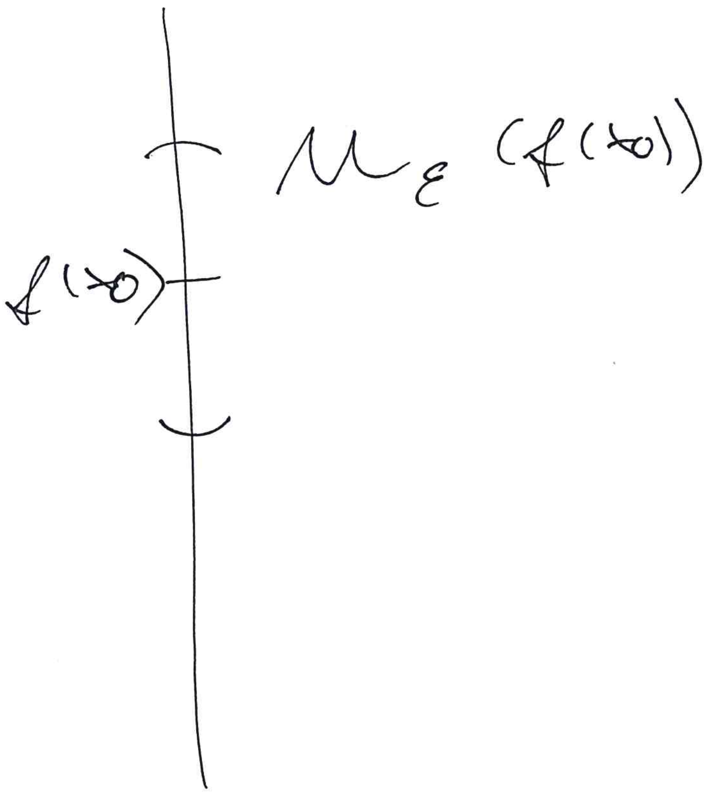
$\varepsilon = \frac{1}{k}$ ... $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ---> $k = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$

check: $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$

pak pro $n > k$

je $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$

Ještě chceme ukázat: $f(x_n) \not\longrightarrow f(x)$



Pokud by ~~$f(x_n) \to f(x)$~~

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$, tak

musí v $U_\varepsilon(f(x_0))$

ležet členy posloupnosti

$\{f(x_n)\}$ počínaje k-tým.

(to neplatí)

~~definice~~

Jinak: negace ~~limity~~ to

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N},\, n > k)\big(f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(x_0))\big)$$

n-tý člen posloupn.

limita posl.