$x_n = \sqrt{x_{n-1}+2}$

vemo: $(\forall n \in \mathbb{N})(x_{n+1} > x_n \wedge x_n < 2)$

torej obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ~~$< +\infty$~~ $\in \mathbb{R}$

označimo ga z x, vemo $x \leq 2$

¿ $x = 2$?

$$2 - x_n = 2 - \sqrt{x_{n-1}+2} = \frac{4-(x_{n-1}+2)}{2+\sqrt{x_{n-1}+2}} = \frac{2-x_{n-1}}{2+\sqrt{x_{n-1}+2}} < \frac{2-x_{n-1}}{2}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(0 < 2 - x_{n+1} < \frac{2-x_n}{2}\right)$$

indukcija: $(\forall n \in \mathbb{N})\left(0 \xrightarrow{} 0 < 2 - x_n < \frac{2-x_1}{2^{n-1}} \to 0\right)$

Věta o Darbouxově vlastnosti derivace

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ má derivaci f' na I.
(konečnou)

Pak f' má na I Darbouxovu vlastnost.

Důkaz:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $[\alpha, \beta] \subseteq I$, $K \in (f'(\alpha), f'(\beta)) \cup (f'(\beta), f'(\alpha))$,

Chceme ukázat, že ex. $x_0 \in (\alpha, \beta)$ takové, že $f'(x_0) = K$

Položme: $g(x) = f(x) - Kx$ pro $x \in [\alpha, \beta]$

$$g'(x) = f'(x) - K$$

Víme, že g je (plyne ze spojitosti f — plyne z existence a konečnosti f') spojitá na $[\alpha, \beta]$, tedy dle Weierstrassovy věty $(\exists c, d \in [\alpha, \beta])(\forall x \in [\alpha, \beta])(g(c) \le g(x) \le g(d))$

Dva případy:

1) $k \in (f'(\alpha), \cancel{\ }\, f'(\beta))$ ... $g'(\alpha) = f'(\alpha) - k \; \overset{>0}{<0}$

$g'(\beta) = f'(\beta) - k \; \overset{<0}{>0}$

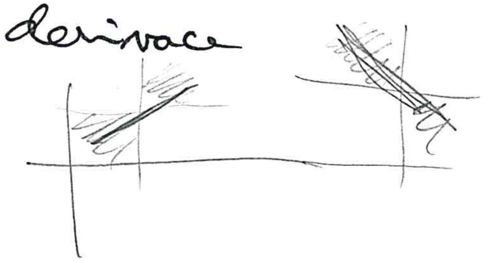
2) $k \in (f'(\beta), f'(\alpha))$

$d \in (\alpha, \beta)$

$\vdots$

$x_0 = d$

$c \in (\alpha, \beta)$ – z lemmatu o znaménku derivace



odtud

$g'(c) = 0$

$f'(c) - k = 0$

$f'(c) = k$

volíme $x_0 = c$

□

Minule jsme ukázali:

Má-li f v bodě x_0 nespojitost typu skoku a $x_0 \in (a,b)$, pak f nemá na (a,b) Darbouxovu vlastnost.

Důsledek:

~~Derivace f'~~

Je-li f' definovaná na (a,b), $x_0 \in (a,b)$, pak f' nemá v x_0 nespojitost typu skoku.

~~Opačná~~ oprava: obměněná implikace:

$x_0 \in (a,b)$, g má v x_0 nespojitost typu skok, pak neexistuje f taková, že $f' = g$ na (a,b)

Tedy: g nemá primitivní funkci na (a,b)

STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST

Definice:

Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)\big(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\big)$$

Pozorování:

Je-li f stejnoměrně spojitá na I, pak je spojitá na I.

x_1 pevné:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x_2 \in I)\big(|x_1 - x_2| < \tilde{\delta} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\big)$$

$$U_{\tilde{\delta}}(x_1) \subseteq I$$

? nastane případ $U_{\tilde{\delta}}(x_1) \not\subseteq I$

$$\delta = \min\{\tilde{\delta},\ \text{vzdálenost } x_1 \text{ od bližšího z krajních bodů } I\}$$

spojitost v x_1: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x)\left(\boxed{|x-x_1|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_1)|<\varepsilon}\right)$

$$\delta \le \tilde{\delta}$$

$$U_\delta(x_1) \subseteq I$$

pak: pokud $x \in I$, pak i $x \in U_\delta(x_1)$, a tedy

implikace platí

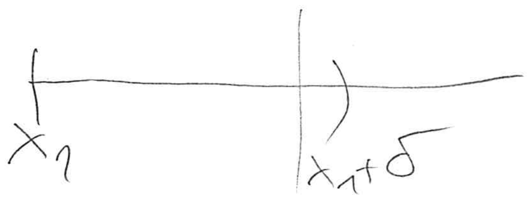
případ krajní bod:

$I = [x_1, b)$]

$I = (a, x_1]$ [spojitost zleva

Spojitost na I značí spojitost v x_1 zprava, tedy:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x)\left(x \in (x_1, x_1+\delta) \Rightarrow |f(x)-f(x_1)|<\varepsilon\right)$$



v případě $(x_1, x_1+\delta) \not\subseteq I$

zase zmenšíme δ

Označme a, b krajní body intervalu, tedy I je jeden z intervalů (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$.

Označme $\delta = \min\{\tilde{\delta}, x_1 - a, b - x_1\}$

Ze stejnoměrné spojitosti plyne: $(\forall x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \tilde{\delta} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$

odtud dále plyne: $(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_1))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_1)))$

a tedy spojitost f v bodě x_1

Pro $x_1 = a$ zvolíme $\delta = \min\{\tilde{\delta}, b - x_1\}$,

pak $(\forall x \in (x_1, x_1 + \delta))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_1)))$

a tedy f je spojitá v bodě $a = x_1$ zprava.

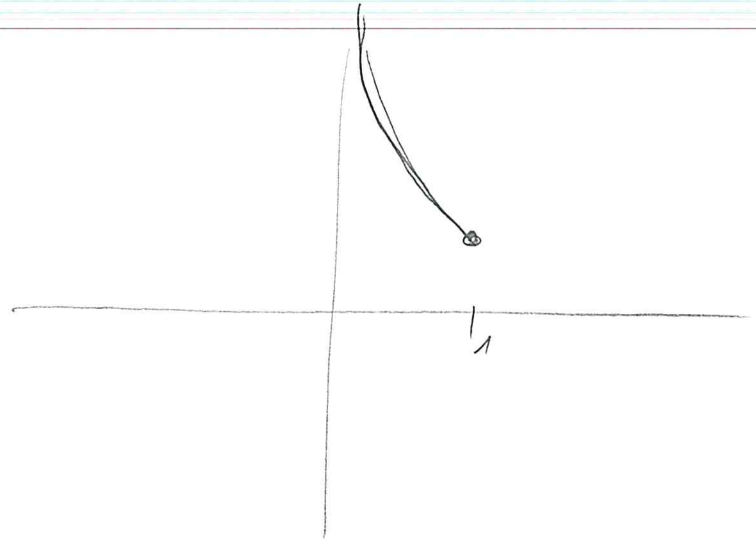
Podobně pro $x_1 = b$ volíme $\delta = \min\{\tilde{\delta}, x_1 - a\}$,

pak $(\forall x \in (x_1 - \delta, x_1))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_1)))$

a tedy f je spojitá v bodě $b = x_1$ zleva.

Příklad:

$I = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$



f je spojitá na I

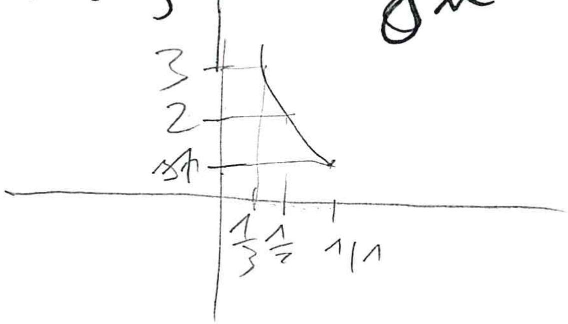
ukážeme, že f není stejnoměrně spojitá na I:

~~ukážeme, že:~~

Zvolme $\varepsilon = 1$ a ukážeme, že

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_1 x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$$

uvažujme $y_n = \frac{1}{n}$, pak $|y_{n+1} - y_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$



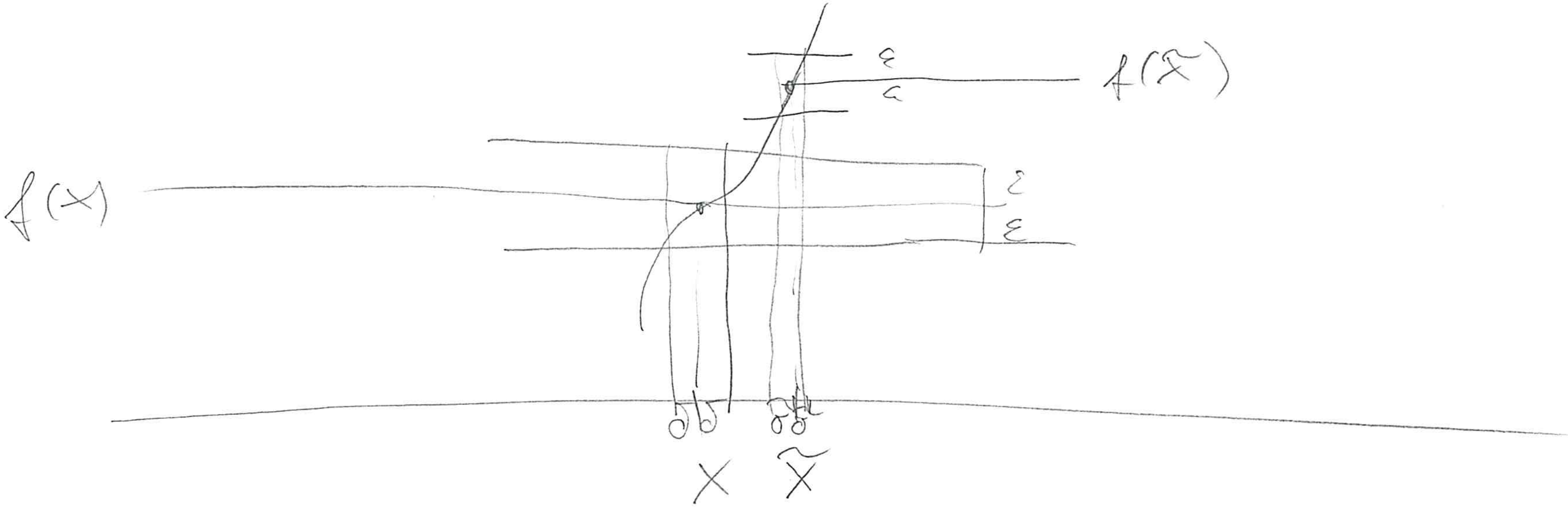
$$|f(y_{n+1}) - f(y_n)| = |n+1-n| = 1$$

pak: $\left| f(y_n) - f(y_{n+1}) \right| = 1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon$

$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$, tedy $\{y_n\}$ je Cauchyovská,

tedy $(\forall \delta > 0)(\exists k)(\forall n, m \geq k)(|y_n - y_m| < \delta)$

stačí volit $n = k$, $m = k+1$ $\square$



$I = (0,1)$

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Věta:

Nechť $I = (a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, f je spojitá na I.

Pak je f stejnoměrně spojitá na I právě když je možné f ~~sp~~ spojitě rozšířit na $[a,b]$.

Věta:

Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak je f stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

Důkaz:

Obměnou (nepřímý důkaz) - ukážeme obměněnou implikaci:

Pokud f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, pak f není spojitá na $[a,b]$.

Co znamená, že f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in [a,b])\big(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\big)$$

k tomuto ε uvažujme $\delta = \frac{1}{n}$ a k němu:

$$x_1 = y_n$$

$$x_2 = z_n$$

máme posloupnosti $\{y_n\}, \{z_n\}$:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big(y_n \in [a,b],\ z_n \in [a,b],\ |y_n - z_n| < \frac{1}{n},\ |f(y_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon\big)$$