$\{y_n\}$ ... omezená posloupnost

vybereme $\{y_{n_k}\}$ konvergentní posloupnost

$\{z_{n_k}\}$ je omezená posloupnost

vybereme $\{z_{m_k}\}$ konvergentní je vybraná z $\{z_n\}$

m_k bude vybraná z n_k

Máme: $\boxed{\{y_{m_k}\}, \{z_{m_k}\}}$ konvergentní

Příklad:

y_n: $0, \cancel{1}, 0, \cancel{1}, 0, \cancel{1}, 0, \cancel{1}, \dots$

z_n: $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$$

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$$

$$\lim_{k\to\infty} |y_{n_k} - z_{n_k}| = |y - z|$$

z $|y_{n_k} - z_{n_k}| < \frac{1}{n}$ plyne

$$\lim_{n\to\infty} |z_{n_k} - y_{n_k}| = 0 \Rightarrow y = z$$

~~Tj.~~

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (a \le y_{n_k} \le b)$$

limitní přechod: $a \le y \le b$, tj. $y \in [a, b]$

~~stejně~~ ukážeme, že f má spojitost v bodě y

a ukážeme tu spor

$y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

každý epsilon splní, tak

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_1)(\forall n \in \mathbb{N},\ n > k_1)\ (\ |y_n - y| < \varepsilon/2)$

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists k_2)\ (\forall n \in \mathbb{N},\ n > k_2)\ (\ |z_n - y| < \varepsilon/2)$

$k = \max\{k_1, k_2\}$

pro $n > k$ je $\quad |y_n - y| < \varepsilon/2$

$\qquad\qquad\qquad\quad |z_n - y| < \varepsilon/2$

odtud $\quad |y_n - z_n| = |y_n - y - (z_n - y)| \le$

$\le |y_n - y| + |z_n - y| < 2\,\varepsilon/2 = \varepsilon$

~~Spor s tím, že $|y_n - z_n| \ge \varepsilon$~~

$\square$

~~máme~~ y_n

máme k : $n > k$, pak $|y_n - y| < \delta$

$$|z_n - y| < \delta$$

pokud by f byla spojitá v bodě y,

pak k ε pro které $|f(y_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$

ex. $\delta > 0$ $\big(\forall x \in U_\delta(y)\big)\big(f(x) \in U_{\varepsilon/2}(f(y))\big)$

volíme $x = y_n$, $x = z_n$: $f(y_n) \in U_{\varepsilon/2}(f(y))$

$$f(z_n) \in U_{\varepsilon/2}(f(y))$$

$$|f(y_n) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(y_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$$

$$|f(z_n) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(y_n) - f(y) - (f(z_n) - f(y))| \leq |f(y_n) - f(y)| + |f(z_n) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

↯

~~Dů~~

Věta:

Nechť $I = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, f je spojitá na I.

Pak je f stejnoměrně spojitá na I právě když je možné f spojitě rozšířit na $[a, b]$.

Důkaz:

"$\Leftarrow$" $\tilde{f}$ .. spojité rozšíření f na $[a, b]$,

pak je $\tilde{f}$ stejnoměrně spojitá na $[a, b]$,

pak je i f stejnoměrně spojitá na (a, b)

vysvětlení: $(a, b) \subset [a, b]$

$(\forall x_1, x_2 \in [a, b])$ něco platí

tedy i $(\forall x_1, x_2 \in (a, b))$ — " —

pro $x_1, x_2 \in (a, b)$ je $f(x_1) = \tilde{f}(x_1)$
$f(x_2) = \tilde{f}(x_2)$

"$\Rightarrow$" mějme $I = (a, b)$, f ~~spojitá na~~ stejnoměrně spojitá na (a, b)

Chceme ukázat: existují konečné limity

$$\lim_{x \to b^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Použijeme Heineho větu:

$\tilde{f}$ je spojitá zprava v bodě a právě když pro každou posloupnost $x_n \to a$, $x_n > a$ platí $\lim_{n \to \infty} \tilde{f}(x_n) = \tilde{f}(a)$

Uvažujme $x_n = a + \frac{1}{n} \to a$ pro $n \to \infty$

ukážeme, že ~~$f(x_n + \frac{1}{n})$~~

$y_n = f(a + \frac{1}{n})$ je Cauchyovská:

víme, že f je stejnoměrně spojitá na (a, b):

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$

$x_1 = a + \frac{1}{n}$ pak $|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$

$x_2 = a + \frac{1}{m}$

vím

$n > K,\ m > K$, tak

$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{K}$

chci ukázat:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K)(\forall n, m)(|y_n - y_m| < \varepsilon)$

$n, m > K$ $\quad \left|f(a + \frac{1}{n}) - f(a + \frac{1}{m})\right| < \varepsilon$

$\delta = \frac{2}{k}$ ... $k = \frac{2}{\delta}$ $\left(k = \left\lceil \frac{2}{\delta} \right\rceil\right)$

k $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$

k $\delta > 0$ .. $k = \frac{2}{\delta}$

$n, m > k$

pak je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Máme: $\left\{ f\left(a + \frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská

odtud: $\left\{ f\left(a + \frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Definujme: $\tilde{f}(a) =$ limita této posloupnosti.

$\tilde{f}(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b)$

Zbývá ukázat, že $\tilde{f}$ je v a spojitá zprava:

Heineho věta: $x_n > a$ pro $n \in \mathbb{N}$

$x_n \to a$ pro $n \to \infty$

ukážeme: $f(x_n) \to \tilde{f}(a)$ pro $n \to \infty$

odtud a z Heineho věty plyne

spojitost $\tilde{f}$ v bodě a

ukažte: $\cancel{\exists} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \tilde{f}(a)$

tj.: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists K)(\forall n > K)\left(|f(x_n) - \tilde{f}(a)| < \varepsilon \right)$

$y_n = a + \frac{1}{n}$

pozorujme: $x_n \to a$

$y_n \to a$, $f(y_n) \to \hat{f}(a)$

f je stejnoměrně spojitá na (a,b)

$$(\forall \delta > 0)(\exists K)(\forall n > K, n \in \mathbb{N}) \left(\begin{array}{l} |x_n - a| < \delta/2 \\ |y_n - a| < \delta/2 \end{array} \right)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \alpha, \beta \in (a,b))(|\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon)$$

$$\alpha = x_n, \quad \beta = y_n$$

z $|x_n - y_n| < \delta$ plyne $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon/2$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K)(\forall n > K)(|f(y_n) - \hat{f}(a)| < \varepsilon/2)$$

$$|f(x_n) - \hat{f}(a)| < \varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\frac{\begin{aligned} &n+(n-1)+\dots+1 \end{aligned}}{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1) = n\cdot(n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2}{}^{3} = 1+4+9+\dots+n^2 \overset{?}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

důkaz: buď matematickou indukcí

nebo
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{3}{}^{4} = \sum_{k=2}^{n+1} k^{3}{}^{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cancel{k^3}+3k^2+3k+1 = \cancel{\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)} + (n+1)^3 - 1$$

$$3\sum k^2 + \underbrace{3\sum k + \sum 1} = (n+1)^3 - 1$$

$$\frac{3}{2}n(n+1)+n = (n+1)^3 - 1$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n$$

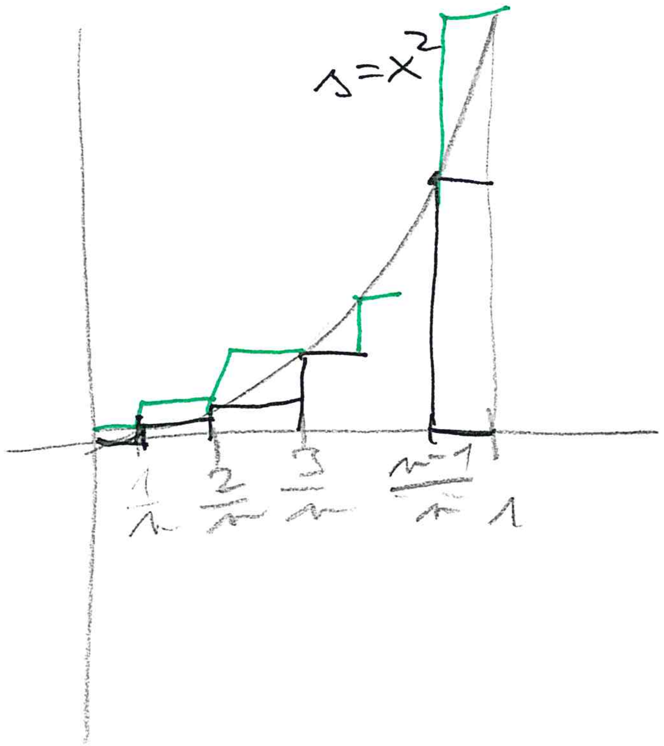
$$\cancel{3n^3 +}$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n =$$

$$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) =$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$



Dolní integrální součet:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{\substack{\cancel{k=0}\\ k=1}}^{n-1} k^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1) =$$

$$= \frac{1}{6n^3}(n-1)\,n\,(2n-1) =$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

Horní integrální součet:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6n^3}\,n(n+1)(2n+1) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \to \frac{1}{3}$$

$\cancel{y = n}$ $\quad n = x^3 \quad$ $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

$n = 1 \quad 1 \quad \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4$

$n = 2 \quad 1 + 8 = 9$

$1 + 8 + 27 = 36$

$1 + 8 + 27 + 64 = 100$