Víme co je: dolní integrální součet

horní —"—

dolní Riemannův integrál

horní —"—

Riemannovsky integrovatelná funkce

Riemannův integrál

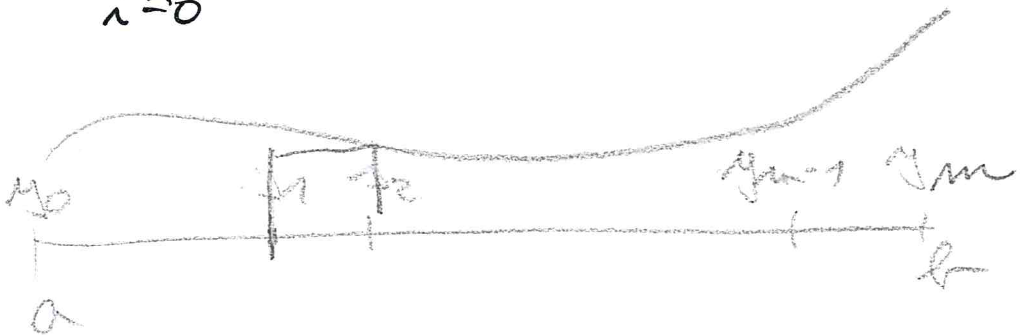
Lemma:

$[a,b]$ interval, f definovaná a omezená na $[a,b]$,

~~DIS, HIS jsou~~

$\sum_{i=0}^{n-1} h_i (x_{i+1}-x_i)$ je HIS

$\sum_{i=0}^{m-1} g_i (y_{i+1}-y_i)$ je DIS



Pak DIS $\leq$ HIS.

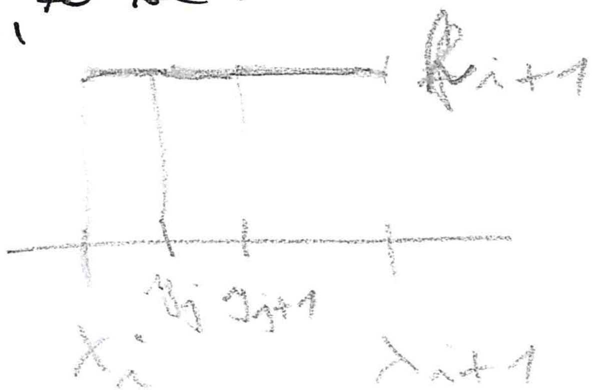
Důkaz:

Vytvoříme dělení intervalu $[a,b]$ obsahující všechny dělicí body x_i, y_i:

$$a = z_0 < z_1 < \dots < z_K = b$$

$$\{z_0, z_1, \dots, z_K\} = \{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}$$

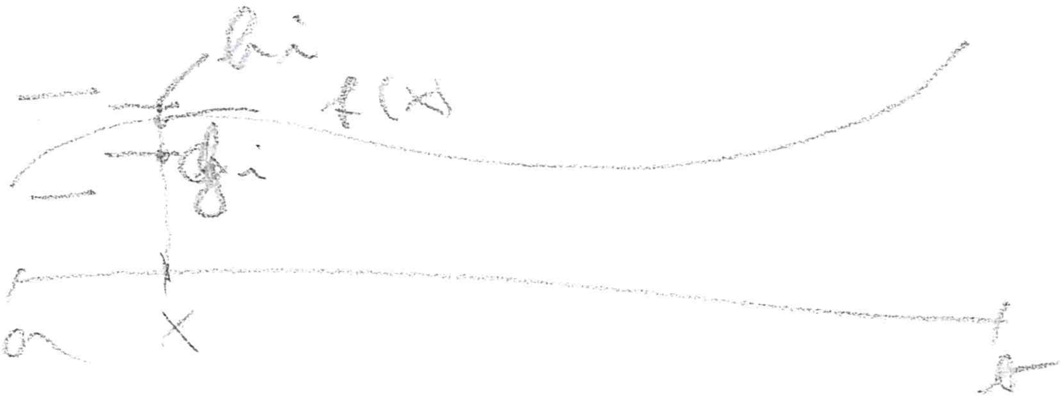
Tomuto dělení $(z_0, \dots, z_K)$ přiřadíme DIS, HIS stejné hodnoty tak, že se rovná dříve uvedeným DIS, HIS



stejné h_{i+1} pro všechny intervaly

$$h_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = h_{i+1}(x_{i+1} - y_{j+1}) + h_{i+1}(y_{j+1} - y_j) + h_{i+1}(y_j - x_i)$$

Teď mám stejnou hodnotu DIS jako prve a stejnou hodnotu HIS jako prve, ale DIS i HIS mají stejné uzlové body.



Více: $(\forall x \in [a,b])\left(g_i \le f(x) \le h_i\right)$

odtud: $g_i \le h_i$ pro $i = 1, \dots, k$,

a tedy $DIS \le HIS$

Lemma:

$[a,b]$ interval, f omezená na $[a,b]$

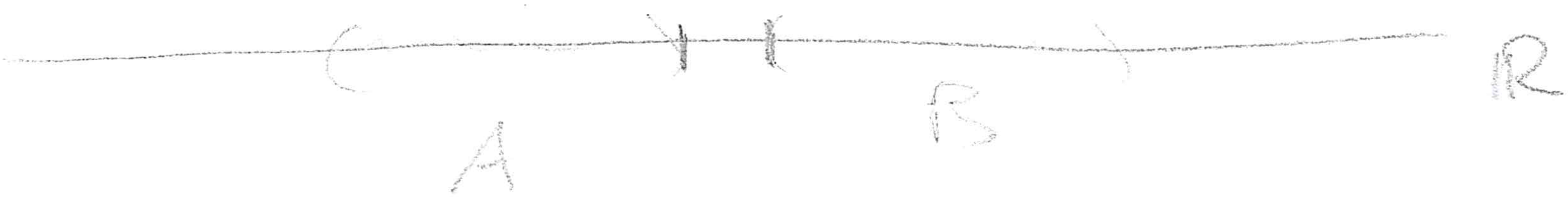
Pak
$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Důkaz:

Zopakujeme:
$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{je} \quad \sup \overbrace{\{\text{DIS funkce } f \text{ na } [a,b]\}}^{A}$$
$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{je} \quad \inf \overbrace{\{\text{HIS funkce } f \text{ na } [a,b]\}}^{B}$$

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\quad \underline{(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \le b)}$ * (viz přidělení lemma)

chceme ukázat: $\sup A \le \inf B$



Z * plyne, že pro $a \in A$ platí ~~$a \le \inf B$~~

a je dolní závora B,

a odtud plyne $a \le \inf B$

~~Př.~~ – rozpor definici infima: ~~a [illegible]~~

(~~$\forall b \in B$~~

$(\forall b \in B)(\inf B \le b)$ .. inf B je dolní závora

Je-li d dolní závora $\Rightarrow d \le \inf B$

d není dolní závora $\Leftarrow d > \inf B$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists b \in B)(b < \inf B + \varepsilon)$

Ukázali jsme: $(\forall a \in A)(a \leq \inf B)$ ~ tj $\inf B$ je horní závora A ~ a tedy

$$\inf B \geq \sup A$$

$\square$

Důsledek:

Z lemmatu plyne:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq 0$$

Lemma:

$[a,b]$, f omezená na $[a,b]$,

pak f je Riemannovsky integrovatelná právě když

$(\forall \varepsilon > 0)$ ($\exists$ existují HIS, DIS f na $[a,b]$ takové, že

$$(0 \le)\ \text{HIS} - \text{DIS} < \varepsilon \, . \qquad *$$

Důkaz:

Pro každý HIS je

$$\text{HIS} \ge (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \left(\overline{\int_a^b} \ldots \text{ je } \inf\{\text{HIS}\}\right)$$

$$+\quad \text{DIS} \le (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \left(\underline{\int_a^b} \ldots \text{ je } \sup\{\text{DIS}\}\right)$$

$$-\text{DIS} \ge -(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$* \quad \boxed{\text{HIS} - \text{DIS} \ge (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge 0}$$

předchozí lemma

vlastnost * je ekvivalentní ~~inf (I~~

~~$\inf(\text{HIS} - \text{DIS}) = 0$~~

~~$\inf\{\text{HIS} - \text{DIS} :$ kde DIS a HIS patří jsou z množiny všech DIS a HIS funkce $f\}$~~

"$\Rightarrow$" $\quad * \Rightarrow f$ je Riemannovsky integrovatelná

Z * a * plyne $\quad (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$

kdyby $\quad \underbrace{(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx}_{=\alpha} > 0$,

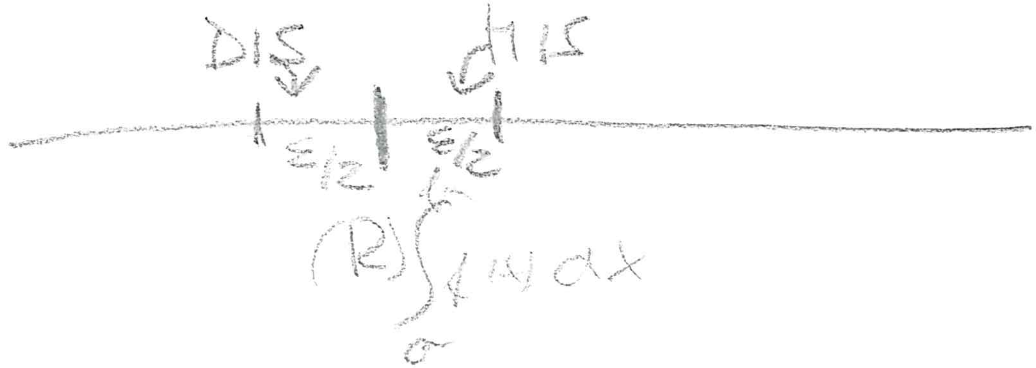
tak pro $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ ~~$\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$ 2ε~~ máme spor:

$$2\varepsilon = \alpha \le \text{HIS} - \text{DIS} < \varepsilon$$

"$\Leftarrow$" <u>f je Riemannovsky integrovatelná</u> $\Rightarrow$ * $(HIS - DIS < \varepsilon)$

Tj. $0 = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

nechť $\varepsilon > 0$



víme: $(R)\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{DIS\}$ tj. k $\varepsilon > 0$

existuje DIS taková, že $DIS > (R)\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$

$= \inf\{HIS\}$, tj. k $\varepsilon > 0$

existuje HIS taková, že $HIS < (R)\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$

Ofišu:

$$DIS > (R)\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$HIS < (R)\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\cdot(-1) \quad -DIS < -(R)\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

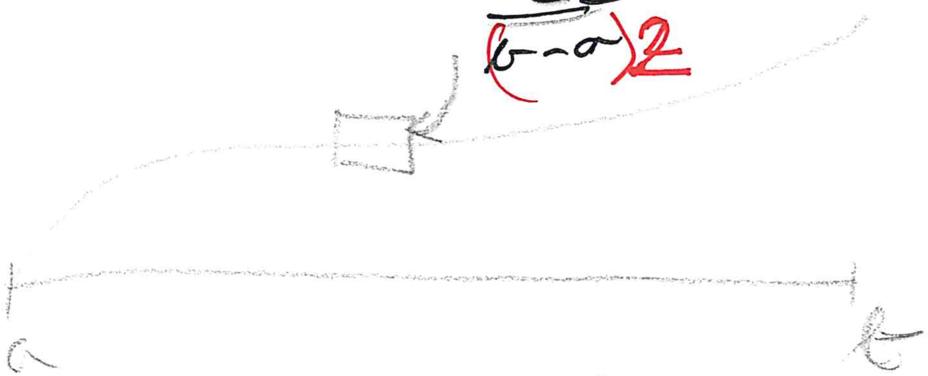
$+$

$$HIS - DIS < \varepsilon$$

Věta:

Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak je f Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.

Důkaz:

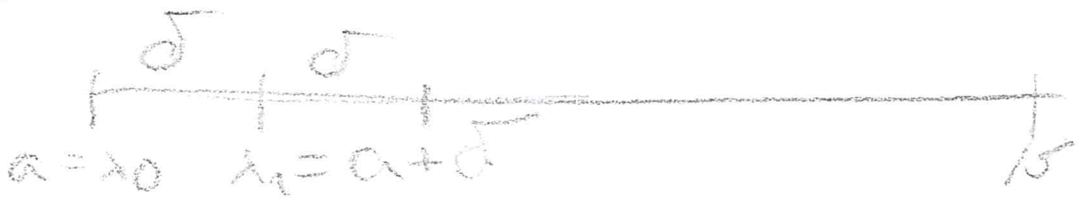


(viz věta [illegible] – podstatné je, že jde o uzavřený interval)

Víme, že f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, tedy

Nechť $\varepsilon > 0$, pak ~~ke $\varepsilon > 0$~~ $(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in [a,b])\left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}_{=\tilde{\varepsilon}}\right)$

$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{(b-a)} > 0$, a tedy



Zvolím:

$x_i = a + i\delta$, $i = 0, 1, \dots, \underbrace{\left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor}_{n-1}$

$x_n = b$

(kdyby $\frac{b-a}{\delta} \in \mathbb{N}$, pak $n = \frac{b-a}{\delta}$,

jinak je $n = 1 + \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor$)

$\cancel{[x_i, x_{i+1})}$

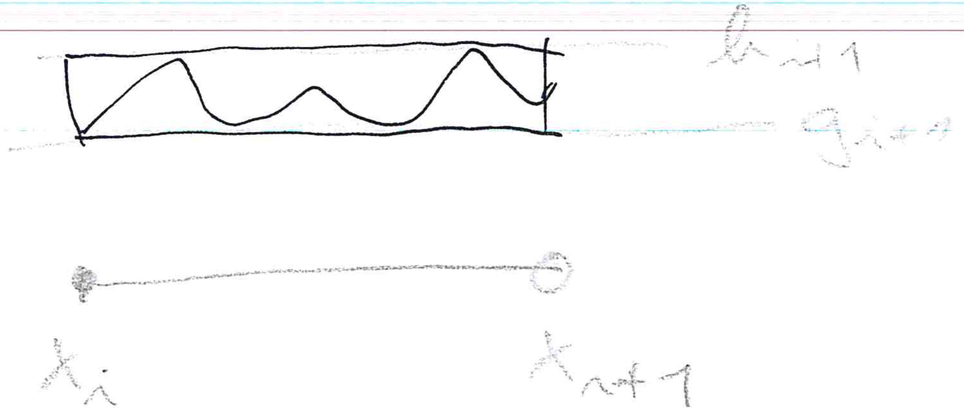
$\cancel{(x_i, x_{i+1}]}$

pro $y_1, y_2 \in [x_i, x_{i+1})$ je $|y_1 - y_2| < \delta$

tedy $|f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Položme: $h_{i+1} = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1})\}$

$g_{i+1} = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1})\}$



Ukážeme: $\forall i$ $\quad \frac{\varepsilon}{b-a} \geq h_{i+1} - g_{i+1} \geq 0$

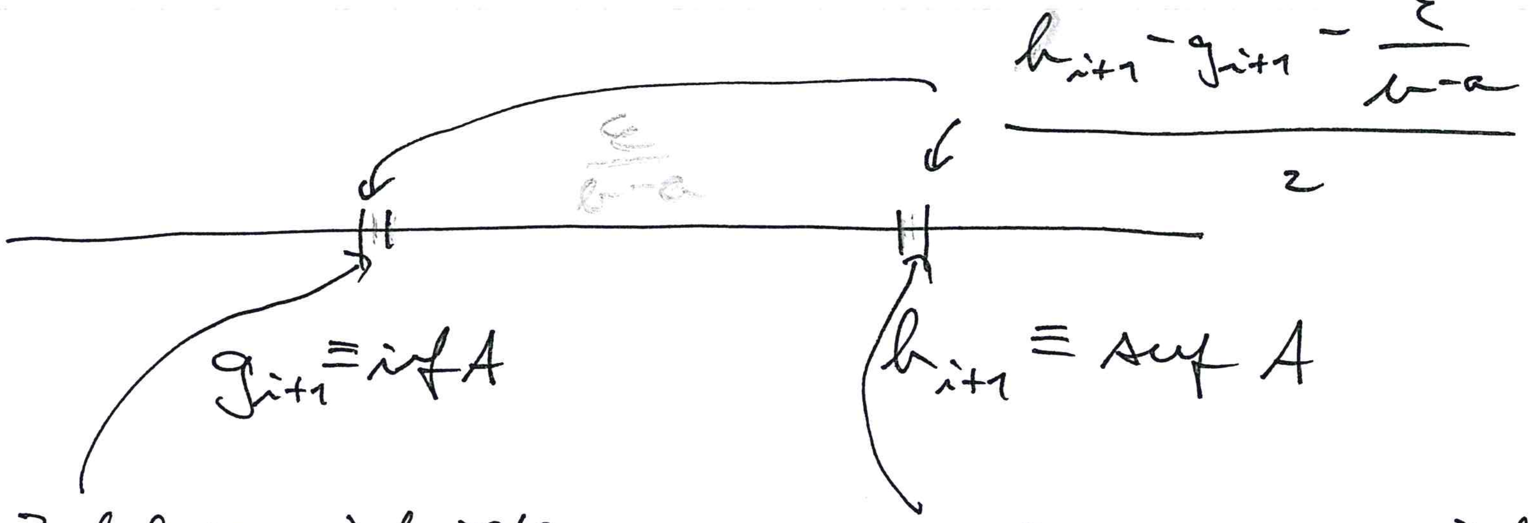
zřejmé

Otázka: $\{ f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}) \} = A$

víme: $(\forall z_1, z_2 \in A)\left(|z_1 - z_2| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right)$

(plyne ze stejnoměrné spojitosti)

Sporem: je-li $h_{i+1} - g_{i+1} > \frac{\varepsilon}{b-a}$



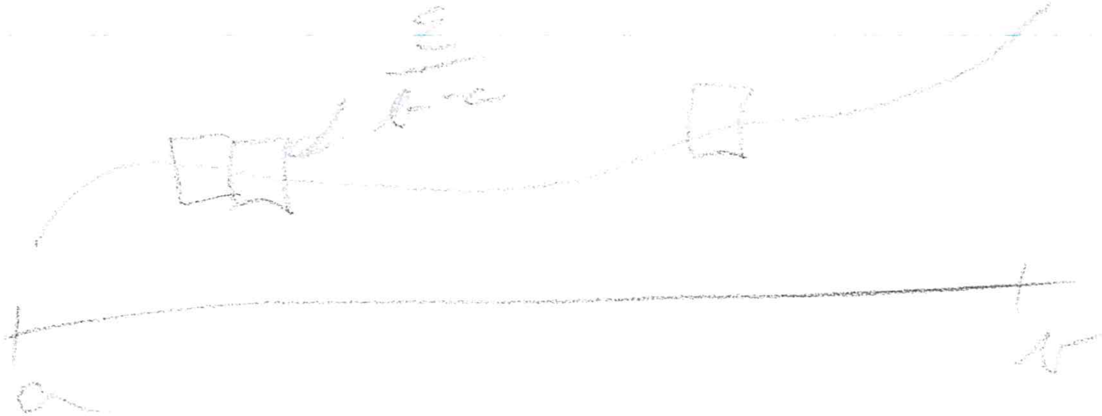
z definice inf zde leží alespoň jeden prvek A .. z_1

z definice suprema zde leží alespoň jeden prvek A ... z_2

pak $|z_1 - z_2| = z_2 - z_1 > \frac{\varepsilon}{b-a}$ ↯

Tedy jsme dokázali: $$\frac{\varepsilon}{b-a} \geq h_{i+1} - g_{i+1} \geq 0$$

pro $i = 0, 1, \dots, n-1$



$$\mathrm{HIS} = \sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1}\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

$$\mathrm{DIS} = \sum_{i=0}^{n-1} g_{i+1}\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

$$\mathrm{HIS}-\mathrm{DIS} = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{>0}\underbrace{(h_{i+1}-g_{i+1})}_{\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\cdot\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon/2 < \varepsilon \qquad \square$$