Budeme uvažovat Riemannův integrál na $[a,b]$, Newtonův integrál (konečný) na $[a,b]$.

Vlastnosti:

① Je-li f konstantní na $[a,b]$, $f(x)=c$, pak

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

(2N) Konvergují-li $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ i $(N)\int_a^b g(x)\,dx$,
(existuje a je konečný) $\qquad I_f \qquad I_g$

pak konverguje i $(N)\int_a^b f(x)+g(x)\,dx$

a je roven součtu $I_f + I_g$

(2R) Jsou-li f, g Riemannovsky integrovatelné na $[a,b]$, pak je i $f+g$ Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ a platí

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)+g(x)\,dx$$

(3N) ~~Je-li f~~ (If)

Konverguje-li $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, pak

konverguje $(N)\int_a^b c f(x)\,dx$ a platí (Icf)

$$(Icf) = c\,(If)$$

(3R) Je-li f Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ pak je cf Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ a platí

$$(R)\int_a^b c f(x)\,dx = c(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

(4N) Konverguje-li $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ a platí-li $(\forall x\in(a,b))(f(x)\geq 0)$, pak i $(N)\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(4R) Je-li f Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$, a $(\forall x \in [a,b])(f(x) \geq 0)$, pak je $(R)\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(5N) ~~Konvergují-li integrály $I_1 = (N)\int_a^b f(x)\,dx$, $I_2 = \int_b$~~

Je-li $c \in (a,b)$ a konvergují-li integrály
$$I_1 = (N)\int_a^c f(x)\,dx, \quad I_2 = (N)\int_c^b f(x)\,dx$$
pak konverguje i $(N)\int_a^b f(x)\,dx$

a je roven $I_1 + I_2$.

(5R) ~~Je-li~~ Je-li $c \in (a,b)$ a f je Riemannovsky integrovatelná na $[a,c]$ i na $[c,b]$, pak je Riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ a platí
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$$

Poznámky:

(1) nazývané aditivitou vzhledem k ~~integrační~~ integrované funkci

(2) nazývané aditivitou vzhledem k integračnímu oboru

(3) nazývané homogenitou

(1)+(3) dávají linearitu:

Důsledek: ~~Pro~~ Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$ tvoří nad $\mathbb{R}$ vektorový prostor (s přirozeně definovanými operacemi) a zobrazení $f \mapsto (R)\int_a^b f(x)\,dx$ je lineární zobrazení.

Totéž pro funkce s konečným Newtonovým integrálem.

(4) zachování pozitivity (nezáporné funkci přiřadíme nezáporné číslo)

(4) s (2),(3) dá monotonii :

$$f(x) \leq g(x) \quad \ldots \quad g(x) - f(x) \geq 0$$

(4) : $$\int_a^b g(x) - f(x) \geq 0$$

(2),(3) : $$\int_a^b g(x) + (-1) \int_a^b f(x) \geq 0$$

odtud : $$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

Důkaz 5N :

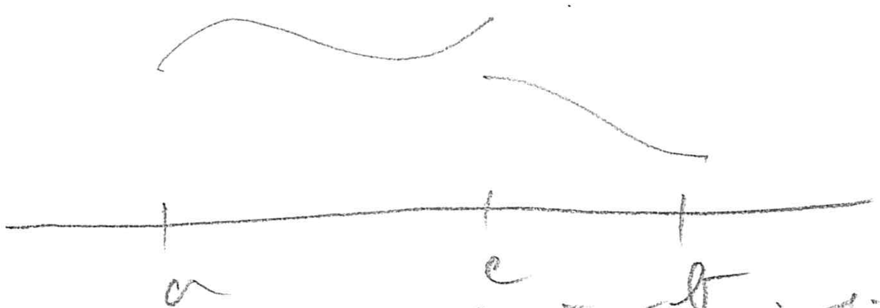
Předpoklady: $c \in (a,b)$

$$\left.\begin{array}{l} (N)\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx \\[2em] (N)\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \end{array}\right\} \text{ konvergují}$$

Chceme ukázat:

$(N)\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje

a platí $(N)\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^c f(x)\,dx + (N)\int_c^b f(x)\,dx$



zobecněná primitivní funkce

Ať F_1 definovaná na (a,c): ~~takovou,~~

~~že $\forall x \in (a,b)$~~

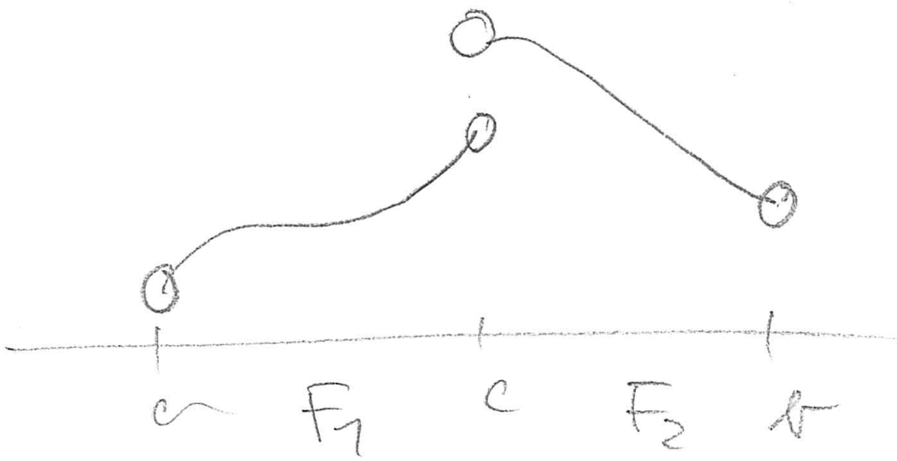
1) je spojitá na (a,c)

2) pro $x \in (a,b)$ kromě konečně mnoha platí $F'(x) = f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to c^-} F(x)$ ~~je konečná~~ $\in \mathbb{R}$

na (c,b) totéž, když máme F_2 ($\exists \lim\limits_{x\to c^+}$)

splňující 1–3 na (a,c) a 1–3 na (c,b)



vytvoříme

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & x\in(a,c) \\ \lim\limits_{x\to c^-} F_1(x) & x = c \\ F_2(x) - \left(\lim\limits_{x\to c^+} F_2(x) - \lim\limits_{x\to c^-} F_1(x)\right) & x\in(c,b) \end{cases}$$

Pak: 1) F je spojitá na (a,b)

2) $\lim\limits_{x\to a^+} F(x) \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) \in \mathbb{R}$

4) $\{x\in(a,b) : (F'(x) \text{ neexistuje}) \text{ nebo } (\text{existuje a } F'(x)\neq f(x))\}$ je konečná

Ukázali jsme, že $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje,

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

$$(N)\int_a^c f(x) + (N)\int_c^b f(x) = \lim_{x\to c^-} F_1(x) - \lim_{x\to a^+} F_1(x) + \lim_{x\to b^-} F_2(x) - \lim_{x\to c^+} F_2(x)$$

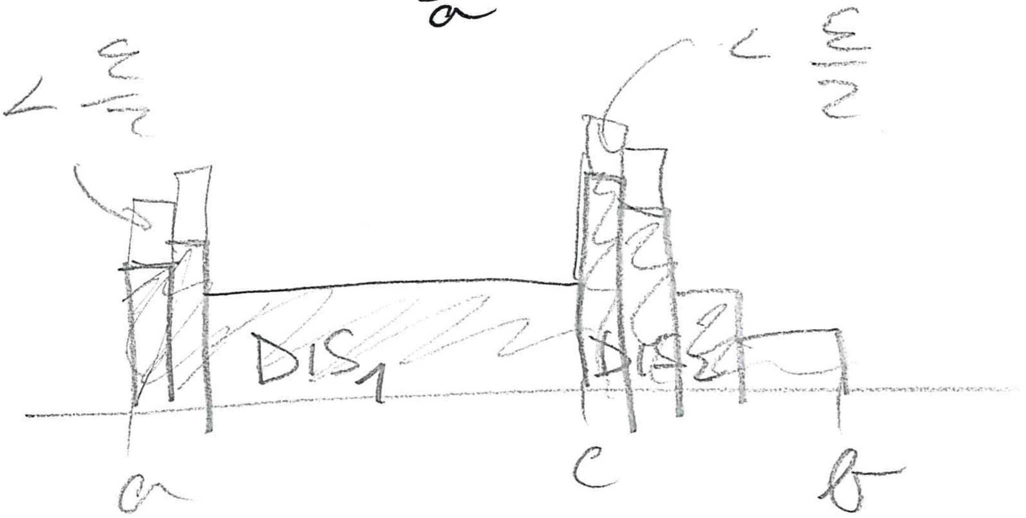
Důkaz (5R')

Předpokládáme:

existují $(R)\int_a^c f(x)\,dx$ $(*)$, $(R)\int_c^b f(x)\,dx$ $(**)$

Chceme:

existuje $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ a je rovna součtu



z $(*)$ ~~existuje~~ plyne existence

DIS_1 na $\langle a,c\rangle$ a HIS_1 na $\langle c,b\rangle$,

které ~~se~~ liší o méně než $\frac{\varepsilon}{2}$

z $(**)$ totéž na $\langle c,b\rangle$

DIS_2 HIS_2

Vytvoříme DIS, který je na $DIS_1 + DIS_2$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \sup \left\{ DIS_{\text{na } (a,c)} \right\} = A$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \sup \left\{ DIS_{\text{na } (c,b)} \right\} = B$$

C .. množina $\left\{ DIS_{\text{na } (a,b)} \right\}$

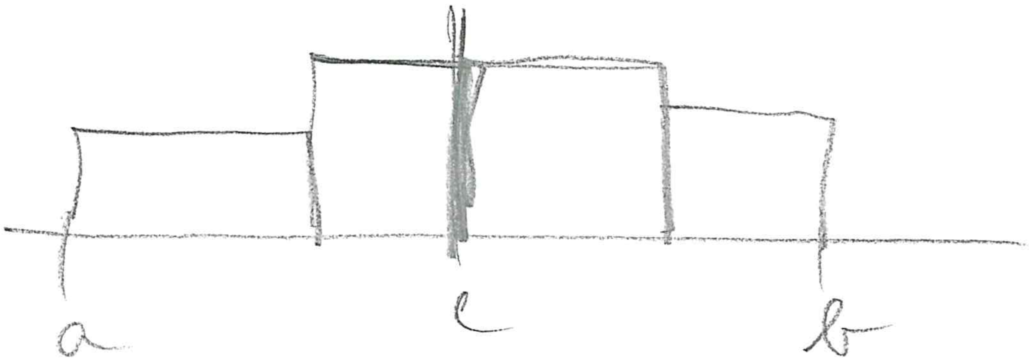
~~Tvrdíme~~ $\cancel{A}$

definujeme $A+B = \left\{ a+b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B \right\}$

Tvrdíme $\cancel{A+B \subseteq C}$ A

$A+B \subseteq C$

$C \subseteq A+B$? ano



D.Ú: ověřit $\sup(A+B) \overset{?}{\underset{=\ \leq\ \geq}{}} \sup(A)+\sup(B)$

$$F = \{ f(x) : x \in D \}$$

$$G = \{ g(x) : x \in D \}$$

$$F \oplus G = \{ f(x) + g(x) : x \in D \}$$

$$F + G = \{ f(x) + g(y) : x, y \in D \}$$

$$\sup (F \oplus G) \leq \sup(F) + \sup(G)$$

(f Dirichletsche Funktion

$f(x) + g(x) = 1$)