Definice

Výraz $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

nazýváme polynomem (mnohočlenem).

Čísla $a_n, \dots, a_0$ nazýváme koeficienty polynomu. Pokud je $a_n \neq 0$, tak číslo n nazýváme řádem (stupněm) polynomu.

Polynomem nazýváme i funkci

$$x \mapsto a_n x^n + \dots + a_0$$

Budeme používat symboliku $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Hodnotu $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ budeme značit $P(x)$ $(Q(x), P_1(x) \dots)$

Definice

Číslo $x \in \mathbb{R}$ nazýváme kořenem polynomu P, pokud platí $P(x) = 0$.

Lemma:

Je-li P polynom stupně n, $a \in \mathbb{R}$, pak existuje polynom Q stupně ~~o jedna menšího~~ $n-1$ takový, že
$$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + P(a)$$

Důkaz:

Q získáme vydělením $P(x) : (x-a)$, zbytek je polynom stupně menší než jedna – tedy číslo, dosazením a do rovnice
$$P(\underset{\substack{\uparrow\\ x=a}}{a}) = (\underset{\substack{\uparrow\\ x=a}}{a}-a)\cdot Q(\underset{\substack{\uparrow\\ x=a}}{a}) + \text{číslo}$$
dostaneme číslo $= P(a)$.

Příklady:

$x^5 - 3x$ .. polynom 5-tého stupně

$x + 2$ .. 1-ního stupně

5 nultého stupně

$P(x) = 0$ .. polynom – NULOVÝ POLYNOM

Základní věta algebry:

Nechť P je polynom stupně alespoň jedna, pak existuje $a \in \mathbb{C}$, které je kořenem P (tedy $P(a)=0$).

Důsledek:

Je-li P_n polynom stupně n, pak existuje $a_1 \in \mathbb{C}$, že

$$P_n(x) = (x-a_1)\boxed{Q_{n-1}(x)} \leftarrow$$ aplikujeme znova základní větu algebry

$$P_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)\cdot \text{číslo}$$

Přepis:

P_n .. ex. $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, že

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Věta:

Nechť P je polynom s reálnými koeficienty. Pak existují polynomy stupně jedna nebo dva takové, že P je jejich součin.

Důkaz je založen na rozkladu na součin kořenových činitelů v komplexním oboru a na tom, že s kořenem $a+ib$ má polynom i kořen $a-ib$ a že $(x-a-ib)(x-a+ib)=(x-a)^2+b^2$

Limity polynomů v nekonečnu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = x^n\Big(\underbrace{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}_{\to\, a_n}\Big)$$

pro $x \to {+\infty \atop -\infty}$ je

(a z toho plynou limity)

Počty kořenů (reálných) polynomů:

1) Z rozkladu na součin plyne, že polynom stupně n má v $\mathbb{R}$ nejvýše n kořenů

2) Polynom sudého stupně nemusí mít žádný kořen – např. x^6+1

3) Polynom lichého stupně má alespoň jeden kořen – plyne z limit v $\pm\infty$ a ze spojitosti (a z věty o kořeni spojité funkce)

Definice

Funkci $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy, Q je nenulový, nazýváme <u>racionální funkcí</u>.

Pokud je stupeň Q > stupeň P, nazýváme tuto funkci <u>ryze lomenou racionální funkcí</u>.

Lemma:

Každou racionální funkci je možné vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

Důkaz:

Vyjádření získáme vydělením polynomu polynomem, zbytek bude v čitateli ryze lomené funkce.

Definice:

<u>Parciálními zlomky</u> nazýváme racionální funkce

$$\frac{1}{(x-a)^n}, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}, \\[2ex] \dfrac{x}{(x^2+px+q)^n} \end{array}\right\}, \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{R},\ p^2-4q < 0,\ n \in \mathbb{N},\ n > 0$$

Příklady:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3}, \quad \frac{1}{x^2+x+5}, \quad \frac{\cancel{2}x}{x^2-3x+5}, \quad \cancel{\frac{1}{x^2+3x-5}} = \frac{1}{\left(x-\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x\cancel{+}-\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right)}, \quad \frac{1}{x^6}$$

Věta o rozkladu na parciální zlomky:

Nechť R je ryze lomená racionální funkce.

Pak R je možné vyjádřit jako lineární kombinaci parciálních zlomků. ~~Tato lineární~~

Koeficienty této lineární kombinace / Tato LK } jsou určeny / je určena jednoznačně (pokud nepoužijeme stejný parciální zlomek vícekrát)

Příklad:

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = A\cdot\frac{1}{(x+1)^3} + B\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Fx+G}{x^2+x+1}$$

$$\frac{D+Ex}{(x^2+x+1)^2} \qquad + D\frac{1}{(x^2+x+1)^2} + E\frac{x}{(x^2+x+1)^2} + F\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{G\ldots}{x^2+x\ldots}$$

Výpočet koeficientů

Chceme, aby $=$ platila pro všechna x, pro něž jsou výrazy definované (zde pro $x \neq -1$)

Pravou stranu upravíme:

$$\frac{A(x^2+x+1)^2 + B(x+1)(x^2+x+1)^2 + C(x+1)^2(x^2+x+1)^2 +}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{+ (D+Ex)(x+1)^3 + (F+Gx)(x+1)^3(x^2+x+1)}{}$$

...

porovnání čitatele:

$$1 = A(\quad)^2 + B(\quad)(\quad)^2 + \ldots$$

Stupeň jmenovatele je 7

stupeň čitatele je < 7 (nejvýše 6) $(a_6x^6 + \dots + a_1x + a_0)$

Dostaneme soustavu – porovnání koeficientů

zde 7 rovnic pro 7 neznámých

Příklad:

$$\frac{x^3-2x^2+5}{\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)}(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \quad \Big/ \cdot (x^2-1)(x^2+1)$$

$$x^3-2x^2+5 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

$$x^3-2x^2+5 = A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + C(x^3-x) + D(x^2-1)$$

$$x^3-2x^2+5 = x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)$$

$$\left.\begin{aligned} x^3&: & 1 &= A+B+C \\ x^2&: & -2 &= A-B+D \\ x^1&: & 0 &= A+B-C \\ x^0&: & 5 &= A-B-D \end{aligned}\right\}$$

vypočteme A, B, C, D dostaneme výsledek