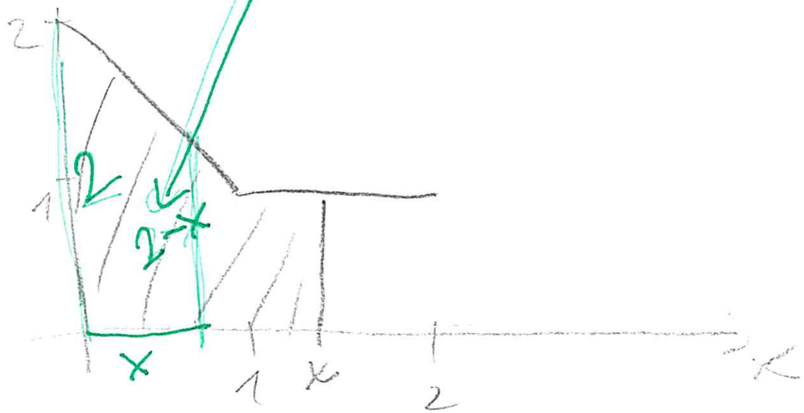
$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1,2] \end{cases}$$



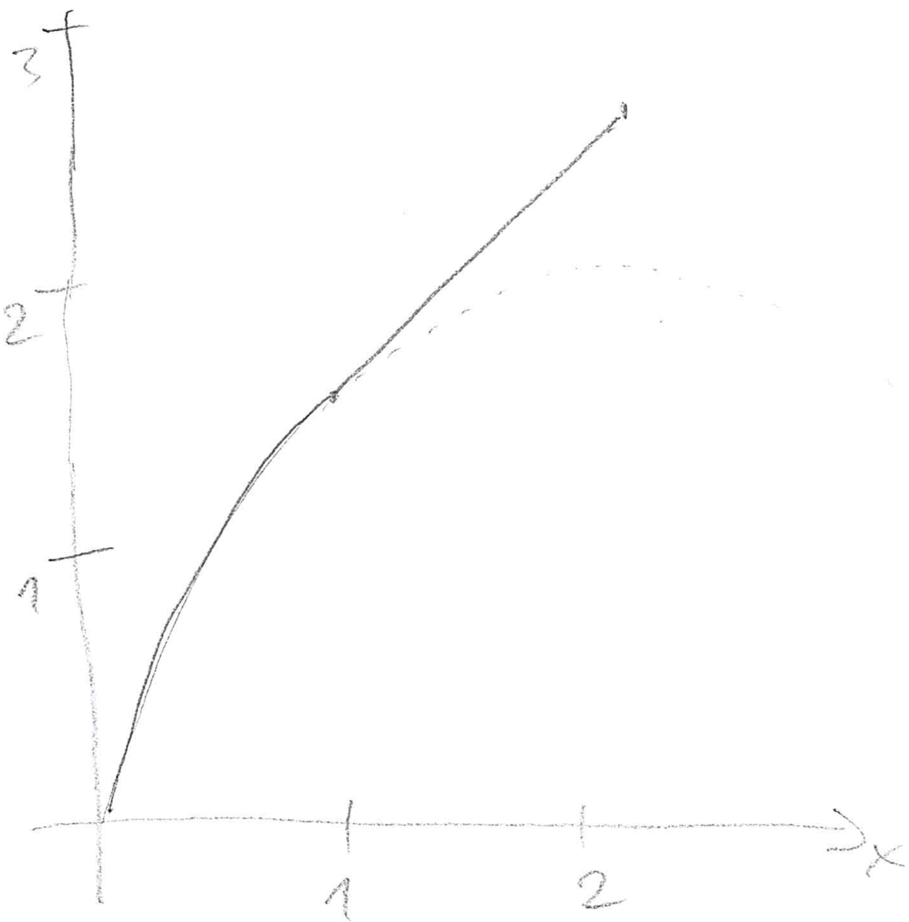
$\sigma(x)$ je obsah obrazce

$$\{[t,y] \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,x],\ y \in [0,f(t)]\}$$

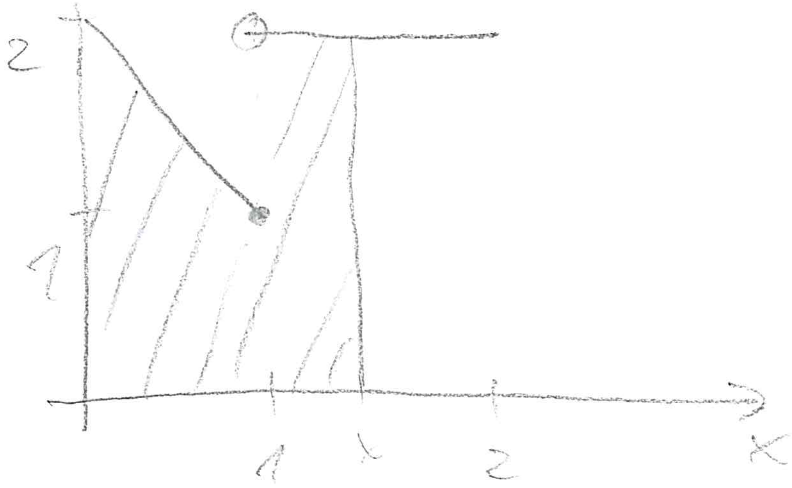
$$\sigma(x) = \begin{cases} \boxed{\dfrac{2+(2-x)}{2}\, x \qquad x \in [0,1]} \\ \dfrac{3}{2} + (x-1) \qquad x \in (1,2] \end{cases}$$

po úpravě

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & x \in [0,1] \\ x + \dfrac{1}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$$



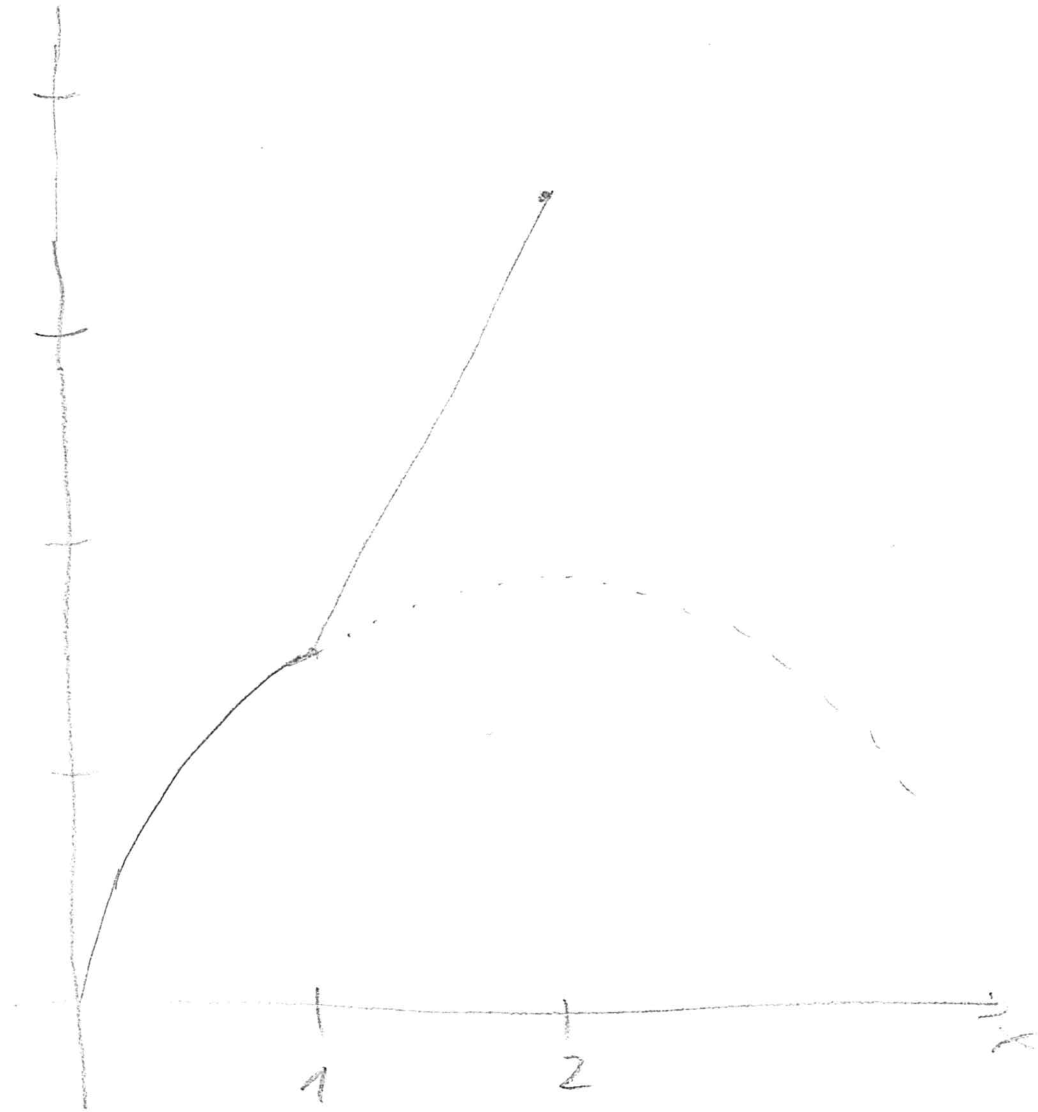
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}$$



$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & x \in [0,1] \\ \frac{3}{2} + 2(x-1) & x \in (1,2] \end{cases}$$

po úpravě

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & x \in [0,1] \\ 2x - \frac{1}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$$



Definice:

Funkci f nazveme **po částech lineární funkcí na intervalu $I=[a,b]$**, pokud existují $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ takové, že $a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b$ a funkce f je na každém intervalu (x_k,x_{k+1}) pro $k=0,\dots,n-1$ lineární.

Body $x_0,\dots,x_n$ budeme nazývat **uzlovými body** funkce f.

Pro po částech lineární a nezápornou na $[a,b]$ funkci f definujeme funkci σ, která $t\in[a,b]$ přiřadí obsah $\sigma(t)$ obrazce

$$\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a,t],\ y\in[0,f(x)]\right\}.$$

Vlastnosti:

1) Funkce f po částech spojitá na omezeném intervalu $I = [a, b]$ je na tomto intervalu omezená. Tj. existují čísla D, H taková, že $(\forall x \in I)(D \leq f(x) \leq H)$

2) Funkce σ je spojitá na $[a, b]$.

3) Je-li funkce f spojitá v bodě $x \in (a, b)$, pak má funkce σ v bodě x derivaci a platí $\sigma'(x) = f(x)$.

4) Je-li f spojitá v bodě a zprava, pak má σ v bodě a derivaci zprava a platí $\sigma'_+(a) = f(a)$.
Podobně ze spojitosti f v bodě b zleva plyne $\sigma'_-(b) = f(b)$.

5) Na hodnotách funkce f v uzlových bodech funkce σ nezávisí. Formální zapsáno:

$$(\forall x \in I \setminus \{x_k\})(f_1(x) = f_2(x)), \text{ pak } \sigma_1 = \sigma_2 \text{ na } I,$$

(σ_1 je funkce obsahů pod grafem f_1, podobně σ_2)

Důkazy vlastností:

1) Lineární funkce f je na omezeném intervalu (x_k, x_{k+1}) omezená.

Horní hranicí je $H_k = \max\{f(x_k), f(x_{k+1})\}$,

dolní — " — $D_k = \min$ — " — .

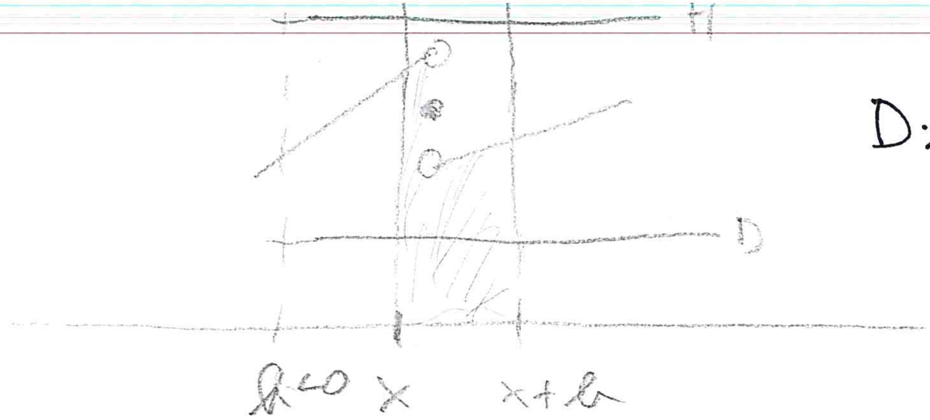
Horní hranicí funkce f je na I:

$$H = \max\{H_0, H_1, \dots, H_{n-1}, f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\},$$

dolní hranicí f na I je:

$$D = \min\{D_0, D_1, \dots, D_{n-1}, f(x_0), \dots, f(x_n)\}.$$

2)



pro $h>0$:

$$D\cdot h \le \sigma(x+h) - \sigma(x) \le H\cdot h$$

z věty o třech funkcích

a z $\lim_{h\to 0} Dh = \lim_{h\to 0} Hh = 0$

dostaneme: $\lim_{h\to 0}\left(\sigma(x+h) - \sigma(x)\right) = 0$ a odtud

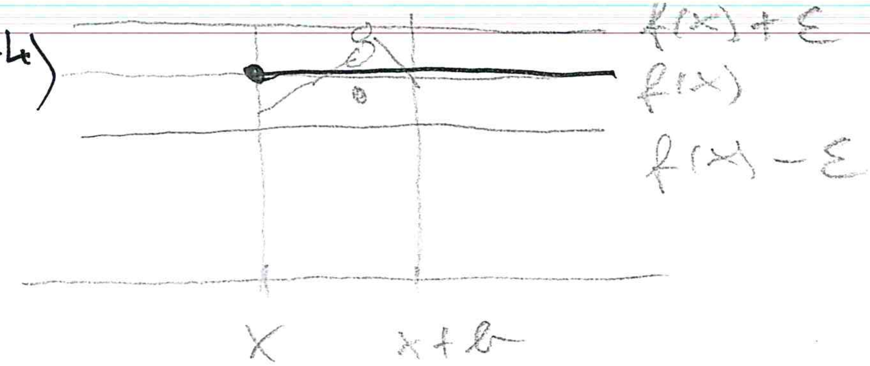
$$\lim_{h\to 0} \sigma(x+h) = \sigma(x)$$

a odtud spojitost σ v bodě x zprava.

Spojitost zleva: pro $h<0$ je $-Dh \le \sigma(x) - \sigma(x+h) \le -Hh$,

další úvahy jsou stejné jako pro výše pro spojitost zprava.

3)–4)



derivace zleva: $\sigma'_-(x)$:

K $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro $h\in(0,\delta)$ platí
$h\in(-\delta,0)$, $h<0$

$$h\,(f(x)-\varepsilon)\le \sigma(x+h)-\sigma(x)\le h\,(f(x)+\varepsilon) \quad \Big|:h$$

$-h \qquad \sigma(x)-\sigma(x+h) \qquad -h \qquad :-h$

$$f(x)-\varepsilon \le \frac{\sigma(x+h)-\sigma(x)}{h} \le f(x)+\varepsilon \quad \Big|-f(x)$$

$$\frac{-(\sigma(x+h)-\sigma(x))}{-h}$$

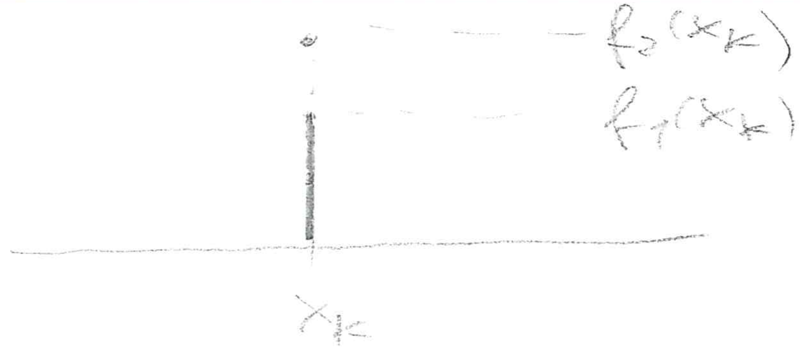
$$-\varepsilon \le \frac{\sigma(x+h)-\sigma(x)}{h}-f(x) \le \varepsilon$$

Odtud: $\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\dfrac{\sigma(x+h)-\sigma(x)}{h}-f(x)\right)=0$ a odtud

$$\sigma'_+(x)=f(x)$$

$$\sigma'_-(x)=f(x)$$

5)



Obrazce pod grafem f_1 a f_2 se liší o úsečku a obsah úsečky je roven nule.

Co pozorujeme:

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{obsah}(A) \leq \text{obsah}(B)$$

Newtonův integrál

oprava

Definice:

Funkci F nazveme zobecněnou primitivní funkcí funkce f na intervalu (a,b), pokud je F spojitá na (a,b) a existují $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$ takové, že

$$(\forall x \in (a,b) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \, (F'(x) = f(x))$$

Poznámka:

Je-li F primitivní funkce f na $[a,b]$, pak je F zobecněnou primitivní funkcí f na $[a,b]$

Definice:

Říkáme, že f má na $[a,b]$ Newtonův integrál, pokud má na (a,b) zobecněnou primitivní funkci F, a existují limity $\lim_{x\to a^+} F(x)$, $\lim_{x\to b^-} F(x)$ a je definován

rozdíl

$$\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Tento rozdíl nazýváme Newtonovým integrálem

f na $[a,b]$ a značíme $(N)\int_a^b f(x)\,dx$.

Příklady:

1) $$(N)\int_0^2 x^3+2\,dx$$

$$f(x) = x^3+2$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x + c$$

$$\lim_{x\to 2^-} F(x) = \frac{1}{4}\cdot 16 + \cancel{8}\,4 + c = 8 + c$$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0 + c$$

$$(N)\int_0^2 x^3+2\,dx = 8+c-(0+c) = 8$$

- - - - - - - - - - - - - -

běžný zápis: $$\int_0^2 x^3+2\,dx = \ldots\ldots = \left[\frac{x^4}{4}+2x\right]_0^2 = 8-0 = 8$$

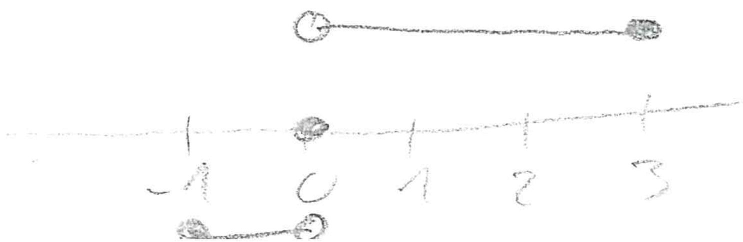
$$\frac{x^4}{4}+2x\Big|_0^2$$

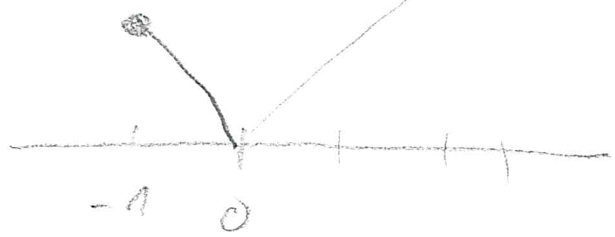
2) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 2-0 = 2$$

3) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_0^1 = \left.\frac{-1}{x}\right|_0^1 =$$

$$= -1 - \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -1-(-\infty) = +\infty$$

4) $$\int_{-1}^{3} \operatorname{sgn}(x)\,dx = |x|\,\Big|_{-1}^{3} = |3|-|-1| = 2$$





Důležitá vlastnost:

Má-li f Newtonův integrál na (a,b) a $c \in (a,b)$, tak má f Newtonův integrál na (a,c) i na (c,b) a platí

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

Důkaz:

F – zobecněná primitivní funkce f na (a,b)

$$\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to c^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) + \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to c^+} F(x)$$

F je spojitá v c, tedy $\lim_{x\to c^-} F(x) = \lim_{x\to c^+} F(x)$

Více praktická formulace:

Má-li f Newtonův integrál na (a,c) i (c,b)

a zobecněné primitivní funkce mají v těchto

integrálech konečné limity v bodě c,

pak má ~~i tk~~ f i Newtonův integrál

na (a,b) a platí $(*)$.

Další příklady

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx \overset{?}{=} \int_{-1}^{0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}_{=(-x)^{-\frac{1}{2}}}\,dx + \int_{0}^{2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}_{=x^{-\frac{1}{2}}}\,dx =$$

$$= \frac{(-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(-1)}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{0}^{2} =$$

$$= 0 - \frac{1^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} - 0 =$$

$$= 2 + 2\sqrt{2}$$

limity jsou konečné

OK

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \ln|x|\Big|_{-1}^{2} = \ln(2) - \ln(1) =$$

$$= \ln(2)$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\infty \qquad\qquad +\infty$$

ln|x| není primitivní funkcí ani zobecněnou primitivní funkcí funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$ na $(-1,2)$

Integrace per partes (po částech)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$f'g = (fg)' - fg'$$

$$\boxed{\int f'g\,dx = fg - \int fg'}$$

Příklady:

1) $$\int x \cdot \sin(x)\,dx = \begin{bmatrix} f' = \sin(x) & f = -\cos(x) \\ g = x & g' = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$

Zkouška: $$(-x\cos(x) + \sin(x))' = \cancel{-\cos(x)} - x(-\sin(x)) + \cancel{\cos(x)} =$$
$$= x\sin(x)$$

2)
$$\int x^2 \exp(x)\, dx = \begin{bmatrix} f' = \exp(x) & f = \exp(x) \\ g = x^2 & g' = 2x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 \exp(x) - \underbrace{\int 2x \exp(x)\, dx}_{2x \exp(x) - \int \underbrace{2 \exp(x)\, dx}_{2 \exp(x)}} = \begin{bmatrix} f' = \exp(x) & f = \exp(x) \\ g = 2x & g' = 2 \end{bmatrix}$$

Výsledek: $x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + 2 \exp(x) = \exp(x)\left(x^2 - 2x + 2\right)$

Zkouška: $\left(\exp(x)\left(x^2 - 2x + 2\right)\right)' = \exp(x)\left(x^2 - 2x + 2\right) + \exp(x)\left(2x - 2\right) =$

$$= x^2 \exp(x)$$

3) $\int 1 \cdot \log(x)\, dx = \left[\begin{array}{lll} \cancel{f = \log(x)} & f' = 1 & f = x \\ & g = \log(x) & g' = \frac{1}{x} \end{array}\right] =$

$$= x\log(x) - \int \cancel{1}\, x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\log(x) - x$$

4) $\int x^3 \sin(2x)\, dx =$

$\int \sin(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$\int \cos(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$$\left[\begin{array}{ll} f' = \sin(2x) & f = -\frac{1}{2}\cos(2x) \\ g = x^3 & g' = 3x^2 \end{array}\right] = -\frac{1}{2}x^3\cos(2x) + \frac{3}{2}\int x^2 \cos(2x)\, dx$$

$$\int x^2\cos(2x)\,dx = \left[\begin{matrix} f' = \cos(2x) & f = \frac{1}{2}\sin(2x) \\ g = x^2 & g' = 2x \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \int x\sin(2x)\,dx$$

$$\int x\sin(2x)\,dx = \left[\begin{matrix} f' = \sin(2x) & f = -\frac{1}{2}\cos(2x) \\ g = x & g' = 1 \end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\underbrace{\int\cos(2x)\,dx}_{+\frac{1}{2}\sin(2x)}$$

Výsledek:

$$-\frac{1}{2}x^3\cos(2x)+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\sin(2x)-\left(-\frac{1}{2}x\cos(2x)-\frac{1}{4}\sin(2x)\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}x^3\cos(2x)+\frac{3}{4}x^2\sin(2x)+\frac{3}{4}x\cos(2x)\mp\frac{3}{8}\sin(2x)$$

zkouška:

$$-\frac{3}{2}x^2\cos(2x)+x^3\sin(2x)+\frac{3}{2}x\sin(2x)+\frac{3}{2}x^2\cos(2x)+$$

$$+\frac{3}{4}\cos(2x)-\frac{3}{2}x\sin(2x)\mp\frac{3}{4}\cos(2x)$$