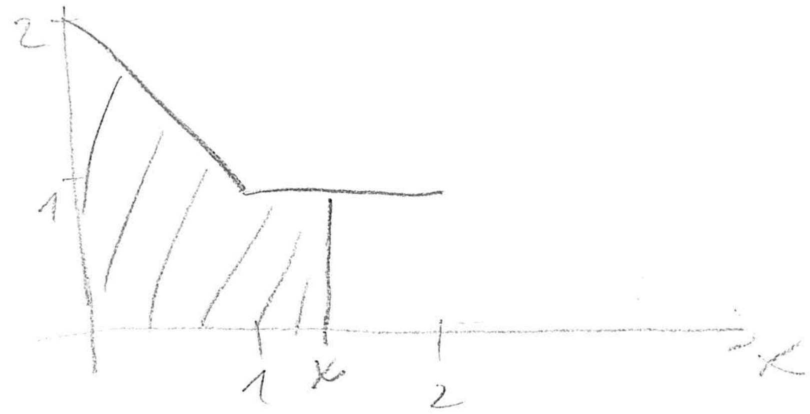
$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \in [0,1) \\ 1 & x \in (1,2] \end{cases}$$

$\sigma(x)$ je obsah obrazce

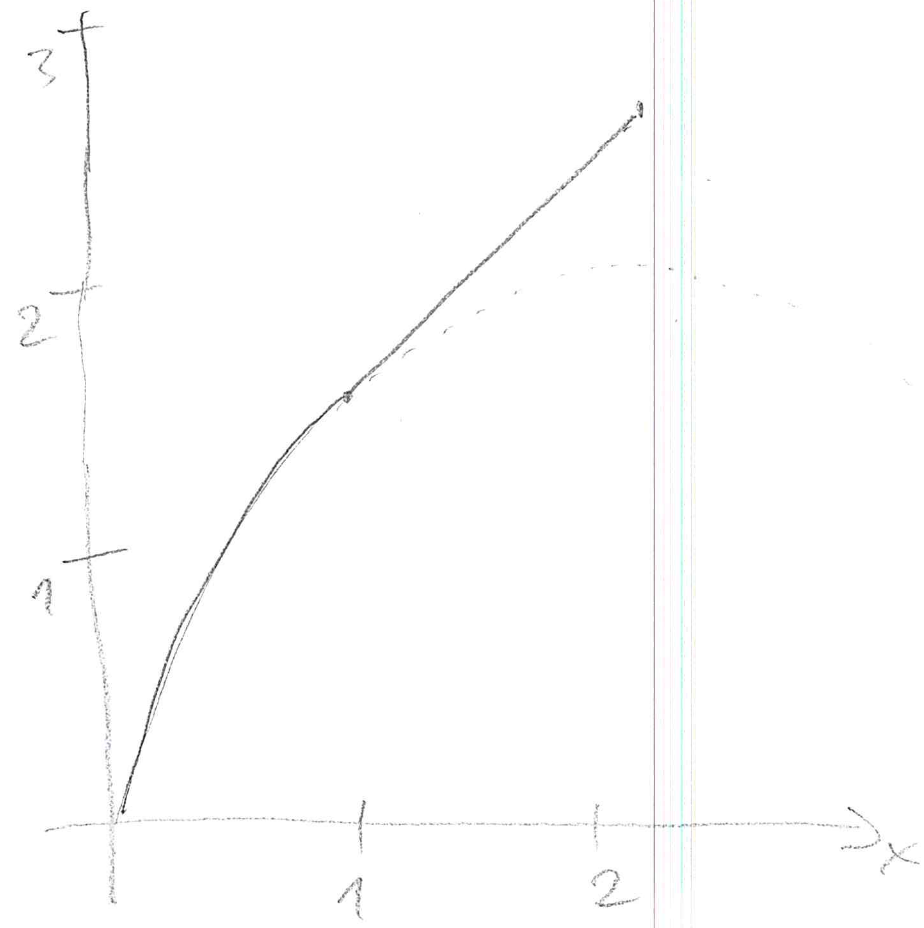
$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y \in [0, f(x)]\}$$



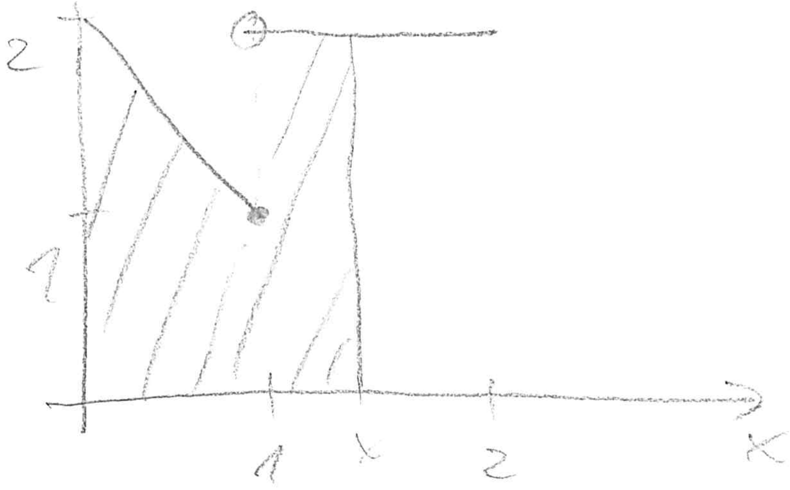
$$\sigma(x) = \begin{cases} \dfrac{2+(2-x)}{2}\, x & x \in [0,1] \\ \dfrac{3}{2} + (x-1) & x \in (1,2] \end{cases}$$

po úpravě

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & x \in [0,1] \\ x + \dfrac{1}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$$



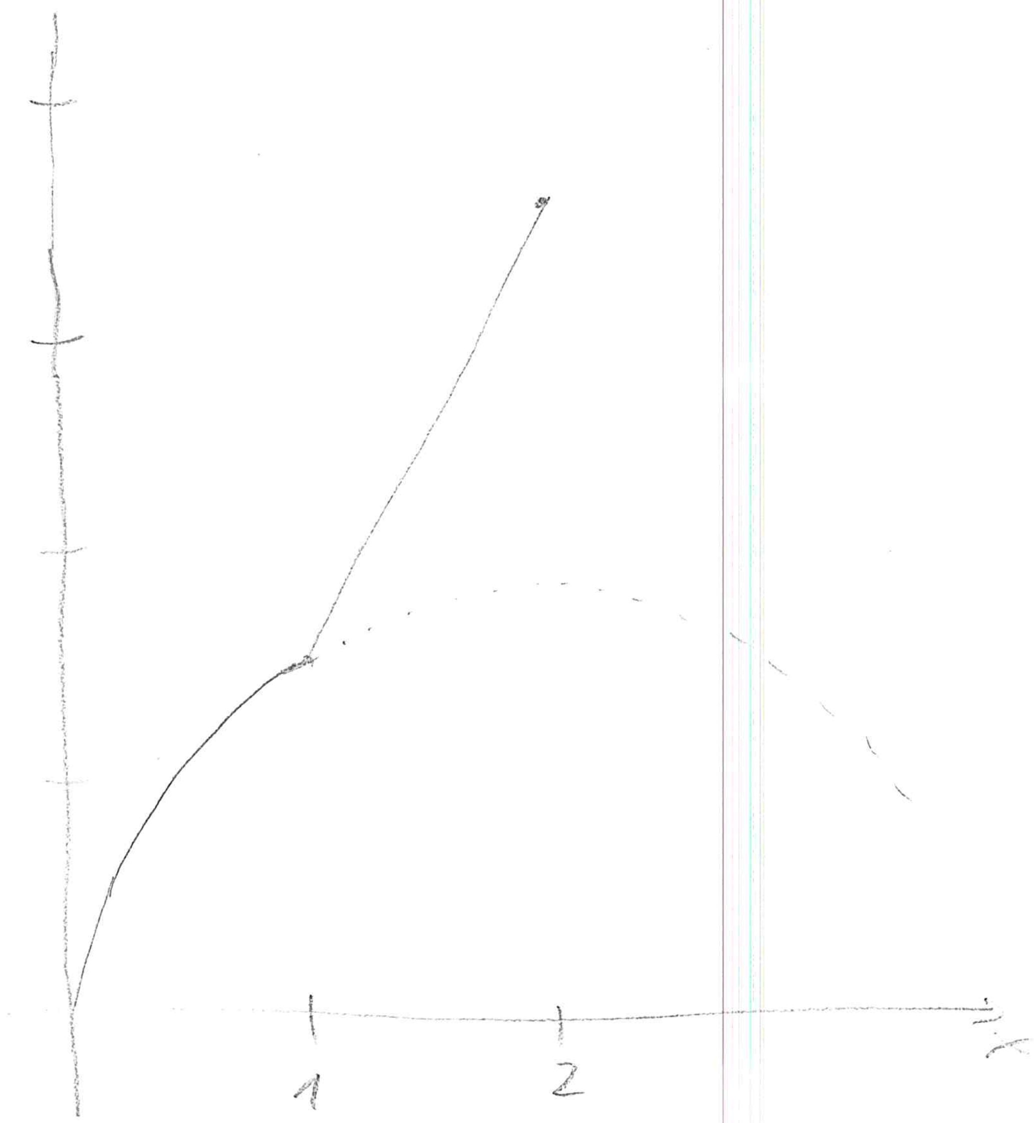
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}$$



$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & x \in [0,1] \\ \frac{3}{2} + 2(x-1) & x \in (1,2] \end{cases}$$

po úpravě

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & x \in [0,1] \\ 2x - \frac{1}{2} & x \in (1,2] \end{cases}$$



Definice:

Funkci f nazveme <u>po částech lineární funkcí na intervalu $I=[a,b]$</u>, pokud existují $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ takové, že $a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b$ a funkce f je na každém intervalu (x_k,x_{k+1}) pro $k=0,\dots,n-1$ lineární.

Body $x_0,\dots,x_n$ budeme nazývat <u>uzlovými body</u> funkce f.

Pro po částech lineární a nezápornou na $[a,b]$ funkci f definujeme funkci σ, která $t\in[a,b]$ přiřadí obsah $\sigma(t)$ obrazce

$$\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,t],\ y\in[0,f(x)]\right\}.$$

Vlastnosti:

1) Funkce f po částech spojitá na omezeném intervalu $I = [a,b]$ je na tomto intervalu omezená. Tj. existují čísla D, H takové, že $(\forall x \in I)(D \leq f(x) \leq H)$

2) Funkce σ je spojitá na $[a,b]$.

3) Je-li funkce f spojitá v bodě $x \in (a,b)$, pak má funkce σ v bodě x derivaci a platí $\sigma'(x) = f(x)$.

4) Je-li f spojitá v bodě a zprava, pak má σ v bodě a derivaci zprava a platí $\sigma'_+(a) = f(a)$.
Podobně ze spojitosti f v bodě b zleva plyne $\sigma'_-(b) = f(b)$.

5) Na hodnotách funkce f v uzlových bodech funkce σ nezávisí. Formálně zapsáno:

$(\forall x \in I \setminus \{x_k\})(f_1(x) = f_2(x))$, pak $\sigma_1 = \sigma_2$ na I,

(σ_1 je funkce obsahů pod grafem f_1, podobně σ_2)

Důkazy vlastností:

1) Lineární funkce f je na omezeném intervalu $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ omezená.

Horní hranice je $H_k = \max\{f(x_k), f(x_{k+1})\}$,

dolní — " — $D_k = \min$ — " — .

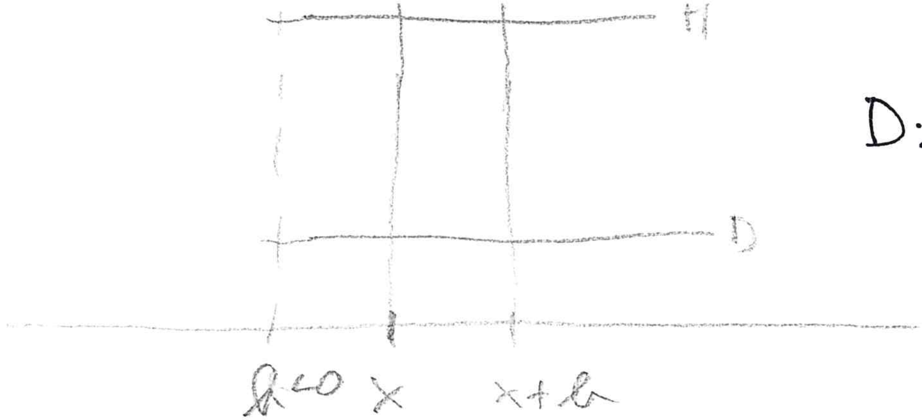
Horní hranice funkce f je na I:

$$H = \max\{H_0, H_1, \dots, H_{n-1}, f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\},$$

dolní hranice f na I je:

$$D = \min\{D_0, D_1, \dots, D_{n-1}, f(x_0), \dots, f(x_n)\}.$$

2)



pro $h>0$:

$$D\cdot h \le \sigma(x+h)-\sigma(x) \le H\cdot h$$

z věty o třech funkcích

a z $\lim\limits_{h\to 0} Dh = \lim\limits_{h\to 0} Hh = 0$

dostaneme: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\sigma(x+h)-\sigma(x)\right)=0$ a odtud

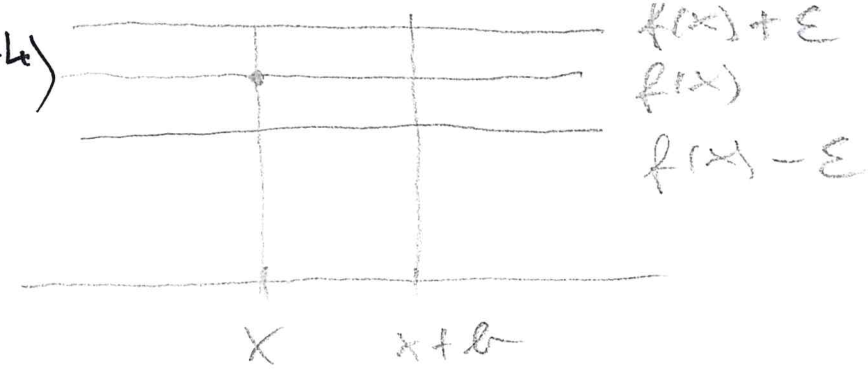
$$\lim_{h\to 0}\sigma(x+h)=\sigma(x)$$

a odtud spojitost σ v bodě x zprava.

Spojitost zleva: pro $h<0$ je $-Dh \le \sigma(x)-\sigma(x+h) \le -Hh$

další úvahy jsou stejné jako pro výše pro spojitost zprava.

3)–4)



K $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $h \in (0, \delta)$ platí

$$h\left(f(x) - \varepsilon\right) \leq \sigma(x+h) - \sigma(x) \leq h\left(f(x) + \varepsilon\right) \quad \Big| :h$$

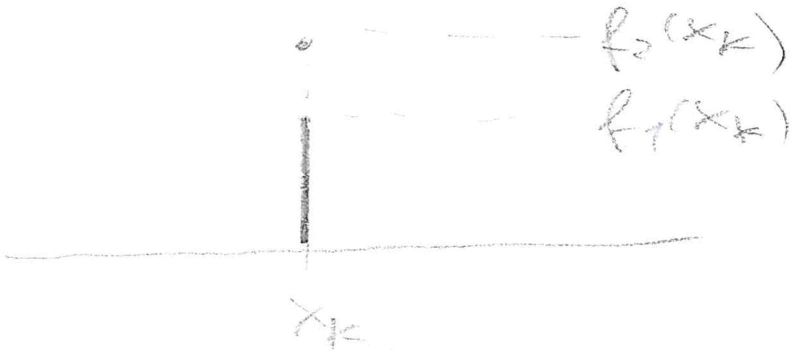
$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} \leq f(x) + \varepsilon \quad \Big| -f(x)$$

$$-\varepsilon \leq \frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} - f(x) \leq \varepsilon$$

Odtud: $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \left(\frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} - f(x) \right) = 0$ a odtud

$$\sigma'_+(x) = f(x)$$

5)



Obrazce pod grafem f_1 a f_2 se liší o úsečku a obsah úsečky je roven nule.