13.1.2 Lebesgueova míra

Víme, že množina racionálních čísel je spočetná. Znamená to, že existuje posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahující všechna racionální čísla. Víme, že konečné množiny jsou Jordanovsky měřitelné a mají míru rovnu nule. Tedy množiny $\cup_{k=1}^{n}\{q_k\}$ jsou všechny Jordanovsky měřitelné a mají nulovou míru. V minulém článku jsme viděli, že jejich sjednocení, tedy množina racionálních čísel, není Jordanovsky měřitelná množina. V teoretických konceptech se často hodí vlastnost

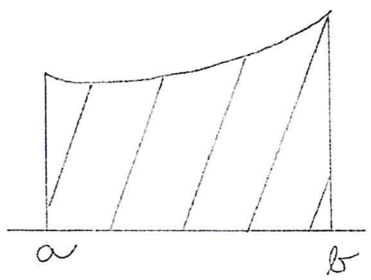
Jsou-li množiny A_k, $k \in \mathbb{N}$ měřitelné,
je měřitelné i jejich sjednocení $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

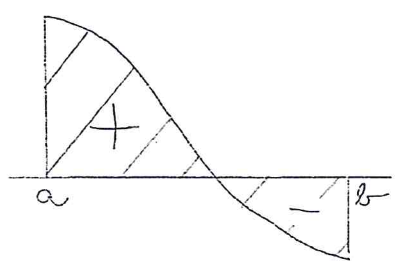
Proto nevystačíme s Jordanovou mírou a zavádíme míru Lebesgueovu.

VNĚJŠÍ LEBESGUEOVA MÍRA, MĚŘITELNÉ MNOŽINY, EXISTENCE NEMĚŘITELNÉ MNOŽINY

13.2 Riemannův integrál

Níže budeme definovat Riemannův integrál. Budeme ho definovat pro omezenou funkci na omezeném intervalu. Pro nezápornou funkci má Riemannův integrál význam obsahu obrazce shora omezeného grafem funkce a zdola osou x. Pro obecnou funkci je Riemannův integrál rozdílem obsahů obrazců nad osou x a pod ní.



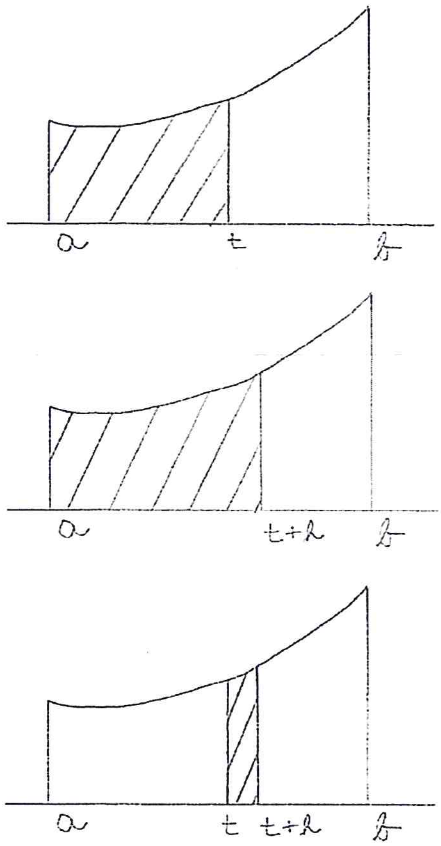


Riemannův integrál budeme definovat (a počítat) pro zadanou funkci na zadaném intervalu. Budeme ho značit symbolem $(\mathcal{R})\!\int_a^b f(x)\,dx$, kde f značí integrovanou funkci a čísla $a < b$ jsou hranicemi intervalu, přes který integrujeme.

Přímo z definice budeme počítat Riemannův integrál jen z funkcí po částech lineárních (použijeme k tomu prostředky elementární geometrie –

vzorce pro obsah trojúhelníku, obdélníku a lichoběžníku) a jen na začátku, než si vypracujeme nástroje na pohodlnější výpočet.

Pro zadanou funkci f budeme zkoumat funkci, která číslu $t \in (a, b)$ přiřadí integrál s proměnnou horní mezí $R(t) = (\mathcal{R})\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. Na příkladech po částech lineárních funkcí ukážeme, že v bodě t, ve kterém je funkce f spojitá, je $R'(t) = f(t)$. Později ukážeme platnost tohoto vztahu pro libovolnou spojitou funkci. Proč tento vztah platí ilustrují následující obrázky.



Na horních obrázcích jsou vyšrafovány plochy o obsazích $R(t)$, $R(t+h)$. Na dolním obrázku má vyšrafovaná plocha obsah rovný rozdílu

$$R(t+h) - R(t)$$

a ten je přibližně roven obsahu obdélníku o šířce h a výšce $f(t)$. Odtud plyne

$$\frac{R(t+h) - R(t)}{h} \doteq f(t)$$

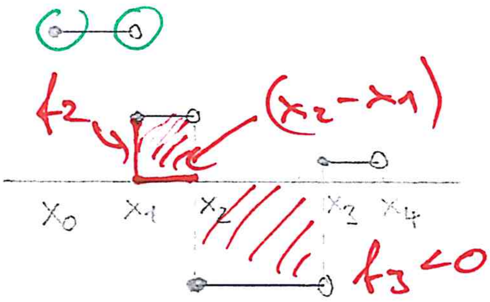
Tato vlastnost nás v následujícím článku povede k pojmu *primitivní funkce funkce* f. Je to funkce F splňující $F' = f$.
Probereme metody výpočtu primitivní funkce a v dalším článku pomocí primitivní funkce definujeme Newtonův integrál, jehož hodnota je pro spojité funkce rovna Riemannovu integrálu. Naučíme se tak počítat obsahy obecnějších obrazců.

Definice.
Dělením intervalu $[a, b]$ nazýváme $n+1$-ici čísel $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, body x_i nazýváme *uzlovými body* dělení.

Je-li $f_1, \dots, f_n$ posloupnost čísel, nazýváme funkci

$$f : x \mapsto f_i \qquad \text{pro } x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

po částech konstantní funkcí na $[a, b]$.

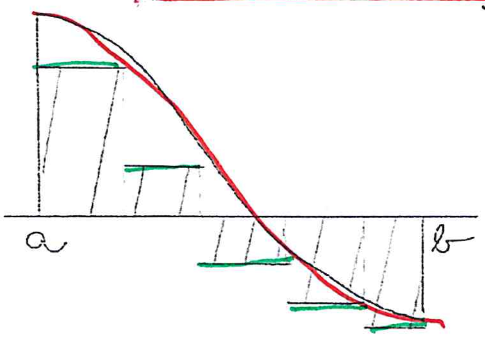


$f_3(x_4 - x_3) < 0$

Výraz $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f_i$ nazýváme *Riemannovým integrálním součtem funkce* f. Budeme ho značit $\mathcal{R}(f)$.

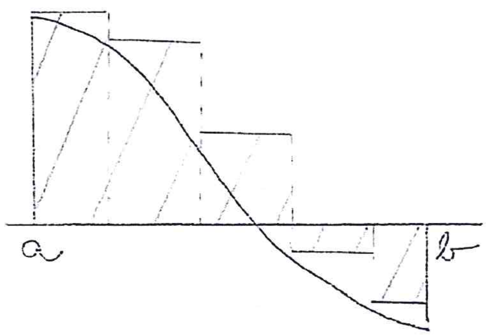
Nerovností mezi funkcemi budeme rozumět nerovnost funkčních hodnot, přitom uvedeme interval pro proměnnou: $f \le g$ na $[a, b]$ tedy znamená, že pro všechna $x \in [a, b]$ je $f(x) \le g(x)$.

Pro funkci g omezenou na intervalu $[a, b]$ definujeme:



Číslo $\mathcal{R}(f)$ pro libovolnou po částech konstantní funkci $f \le g$ na intervalu $[a, b]$ nazýváme *dolním integrálním součtem funkce g na* intervalu $[a, b]$.

Dolním Riemannovým integrálem funkce g na intervalu $[a, b]$ nazýváme supremum dolních integrálních součtů funkce g na $[a, b]$. Značíme ho $(\mathcal{R})\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$.



Horním integrálním součtem funkce g na intervalu $[a, b]$ je číslo $\mathcal{R}(f)$ pro libovolnou po částech konstantní funkci $f \ge g$ na $[a, b]$.

Horním Riemannovým integrálem funkce g na intervalu $[a, b]$ nazýváme infimum horních integrálních součtů funkce g na $[a, b]$. Značíme ho $(\mathcal{R})\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkci g nazveme *Riemannovsky integrovatelnou na* $[a, b]$, pokud se její horní a dolní Riemannovy integrály na $[a, b]$ rovnají. Jejich společnou hodnotu značíme $(\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a nazýváme *Riemannovým integrálem funkce g na* $[a, b]$.

Poznámky.

1. V naší definici je po částech konstantní funkce spojitá zprava. Ve skutečnosti na funkční hodnotě v uzlových bodech dělení nezáleží, Riemannův integrální součet by v tom případě byl definován stejně.

2. Riemannův integrál má smysl počítat jen na omezeném intervalu a jen pro omezené funkce. Je to proto, že ho aproximujeme integrálními součty přes konečný počet omezených intervalů. Na neomezeném intervalu by to nešlo.

   Každá po částech konstantní funkce nabývá konečného počtu hodnot, je tedy omezená. Pro shora neomezenou funkci f by neexistovala po částech konstantní funkce g splňující $f \leq g$. Podobně pro zdola neomezenou f by neexistovala g splňující $f \geq g$.
   TODO: OBRÁZEK

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$x \in (0,1)$

Vlastnosti.

1. TODO: OBRÁZEK
   Pro zadaný interval, na něm zadanou funkci, její dolní integrální součet $\mathcal{R}(f_d)$ a horní integrální součet $\mathcal{R}(f_h)$ platí $\mathcal{R}(f_d) \leq \mathcal{R}(f_h)$.

2. Pro funkci g omezenou na intervalu $[a,b]$ platí

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{13.4}$$

   Levá strana je rovna supremu množiny dolních integrálních součtů

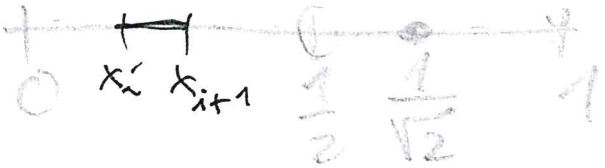
$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\mathcal{R}(f_d) : f_d \leq f \text{ na } [a,b]\}.$$

   Pravá strana je rovna infimu množiny horních integrálních součtů

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\mathcal{R}(f_h) : f_h \leq f \text{ na } [a,b]\}.$$

   Z nerovnosti $\mathcal{R}(f_d) \leq \mathcal{R}(f_h)$ a z lemmatu o supremu a infimu pak plyne nerovnost (13.4). TODO: PŘESNĚJŠÍ ODKAZ NA LEMMA

2. $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



Dolní integrální součty : $f_i \leq 0$

$$(R)\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0$$

Horní integrální součty : $f_i \geq 1$

$$(R)\overline{\int_0^1} D(x)\,dx = 1$$

$$(R)\underline{\int_0^1} D(x)\,dx \neq (R)\overline{\int_0^1} D(x)\,dx$$

a tedy D není Riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$.

~~13.2.2 Velmi stručně o Lebesgueově integrálu~~

13.2.3 Nevlastní Riemannův integrál

Napravuje to, že Riemannův integrál je definován jen na omezeném intervalu a pro omezené funkce.

Definice nevlastního integrálu vlivem meze. Nechť je $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $b > a$ je funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{b \to +\infty} (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, +\infty)$ a značíme ho

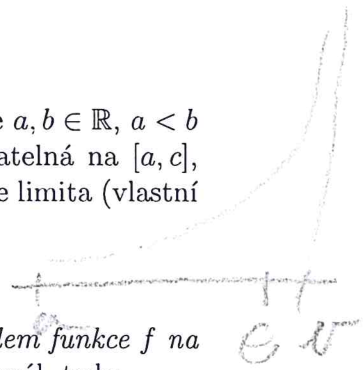
$$(\mathcal{R}) \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně definujeme nevlastní Riemannův integrál na intervalu $(-\infty, b]$

$$(\mathcal{R}) \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice nevlastního integrálu vlivem funkce. Nechť je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a pro každé $c \in (a, b)$ je funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, c]$, ale není Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. Nechť existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{c \to b^-} (\mathcal{R}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Pak tuto limitu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $[a, b]$. Značí se obvykle stejně jako Riemannův integrál, tedy

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně pro funkci integrovatelnou na $[c, b]$, ale nikoliv na $[a, b]$ definujeme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to a^+} (\mathcal{R}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.8}$$

Poznámka. Vztah (13.8) platí i pro Riemannovsky integrovatelnou funkci, ale je pro něj vlastností, kterou je třeba dokázat, zatímco pro nevlastní integrál je definicí.