INTEGRACE SUBSTITUCÍ

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$

$f: x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$, $D(f) = [-1,1)$

f je spojitá na $D(f)$, proto má na $(-1,1)$ primitivní funkci – označíme ji F:

$$\big(\forall x \in (-1,1)\big)\big(F'(x) = f(x)\big)$$

substituce: $y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ spočítáme $x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$ (D.Ú.)

$y \geq 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$$

$x' = 0$ $x' > 0$

x $y = 0$ $y > 0$

z $x' \geq 0$ a $x' = 0$ jen pro $y = 0$ vidíme, že

funkce $x : y \mapsto \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$ je rostoucí na $[0, +\infty)$,

je tedy i prostá na $[0, +\infty)$, (není prostá: $y_1 \neq y_2$ a $x(y_1) = x(y_2)$; rostoucí: $y_1 < y_2 \Rightarrow x(y_1) < x(y_2)$)

existuje tedy inverzní funkce,

a ta je také rostoucí

Pojmenujme: $x = g(y) = \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$, $y = g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$

Hledáme F – pojmenujme $H : y \mapsto F(g(y))$,

pak $H'(y) = \underbrace{F'(g(y))}_{= f(g(y))} \cdot g'(y) = h(y)$

Vypočteme-li H, dostaneme $F(x) = H(g^{-1}(x))$

praktické použití substituce

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$$

zvolíme : $y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

spočítáme : $x = \cancel{\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}}\ \frac{y^2-1}{y^2+1}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$$

① provedeme substituci :

$$\int y \frac{4y}{(y^2+1)^2}\,dy$$

② vypočítáme integrál

(D.Ú.)

$$\int \frac{4y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = 2\,\mathrm{arctg}(y) - \frac{2y}{y^2+1}$$

3) vdělejme zpětnou substituci:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}}{\frac{x+1}{1-x}+1}$$

a upravme

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}$$

Počítání určitý integrál:

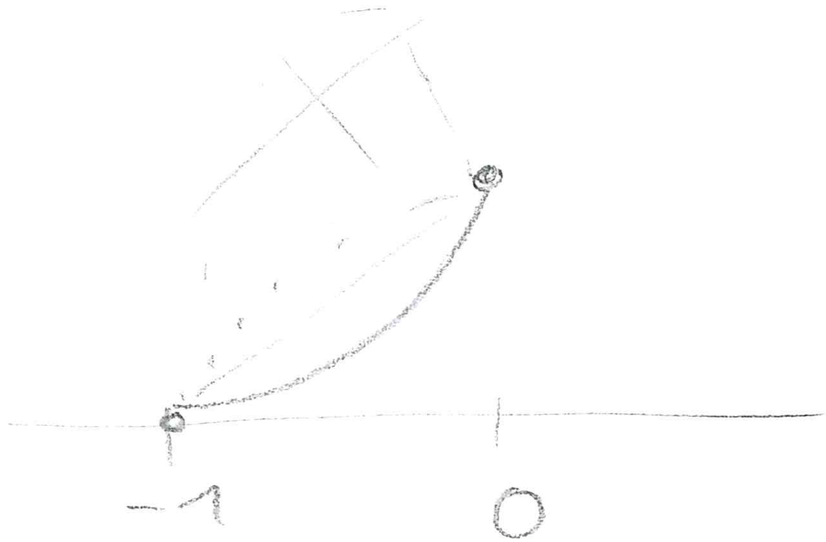
$x=-1$
$y=0$

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \Longleftrightarrow x=\frac{y^2-1}{y^2+1}$$

rostoucí fce

$x=0$
$y=1$

$$x\in(-1,0) \qquad y\in(0,1)$$



$$\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx=\left[2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{0}=\frac{\pi}{2}-1-(0-0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_{0}^{1}\frac{4y^2}{(1+y^2)^2}=\left[2\,\mathrm{arctg}(y)-\frac{2y}{1+y^2}\right]_{0}^{1}=2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2}{2}-(0-0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

Věta:

Nechť f je spojitá na (a,b),

g je ~~spo~~ rostoucí na (α,β) a $g((\alpha,\beta)) = (a,b)$

a g má na (α,β) derivaci.

Nechť $(N)\int_\alpha^\beta f(g(y))\, g'(y)\, dy$ existuje,

pak existuje i $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ a jsou si rovny.

Důkaz: viz povídání u předchozího příkladu

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

substituce: $y = 2x + \sqrt{1+4x^2}$

vyjádříme x : $y - 2x = \sqrt{1+4x^2} \quad /^2$

$$y^2 - 4xy + \cancel{4x^2} = 1 + \cancel{4x^2} \qquad |-1 \quad |+4xy$$

$$y^2 - 1 = 4xy$$

D.Ú.

$$x = \frac{y^2-1}{4y} = \frac{y}{4} - \frac{1}{4y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4y^2} = \frac{y^2+1}{4y^2}$$

provedeme substituci:

$$\int_1^{2+\sqrt{5}} \left(y - 2\frac{y^2-1}{4y}\right)\frac{y^2+1}{4y^2}\,dy$$

$$\int_1^{2+\sqrt5} \frac{y^2+1}{2y}\cdot\frac{y^2+1}{4y^2}\,dy = \int_1^{2+\sqrt5}\frac{y^4+2y^2+1}{8y^3}\,dy =$$

$$= \int_1^{2+\sqrt5} \frac{y}{8}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{8y^3}\,dy = \left[\frac{y^2}{16}+\frac{1}{4}\log(y)-\frac{1}{16}y^{-2}\right]_1^{2+\sqrt5} =$$

$$= \cdots - \frac{(2+\sqrt5)^2}{16}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt5)-\frac{1}{16(2+\sqrt5)^2}-\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)$$

$$\frac{1}{2+\sqrt5}=\frac{2-\sqrt5}{4-5}=$$

$$=\sqrt5-2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\log(2+\sqrt5)+\frac{\sqrt5}{2}}}$$

$$\frac{1}{16}\left((2+\sqrt5)^2-(\sqrt5-2)^2\right)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-y^2}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2}\,dy = \dots$$

$$y = tg\frac{x}{2}$$

x	0	π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\frac{x}{2} = arctg(y)$$

$$x = 2arctg(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{1+y^2}$$

$$\dots \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}}\, \underbrace{arctg \underbrace{\frac{y}{\sqrt{3}}}_{\to+\infty}}_{\to\frac{\pi}{2}} - 0 =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \left(= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} \right)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{y^2}{1+y^2}} \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

dx

$$y = tg(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{\cancel{x}^2 y^2}{1+\cancel{x}^2 y^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2+y^2}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+2y^2}\,dy =$$

$$x = arctg(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}+y^2}\,dy =$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\, arctg\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\, arctg \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg(\sqrt{2}y)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 0$$