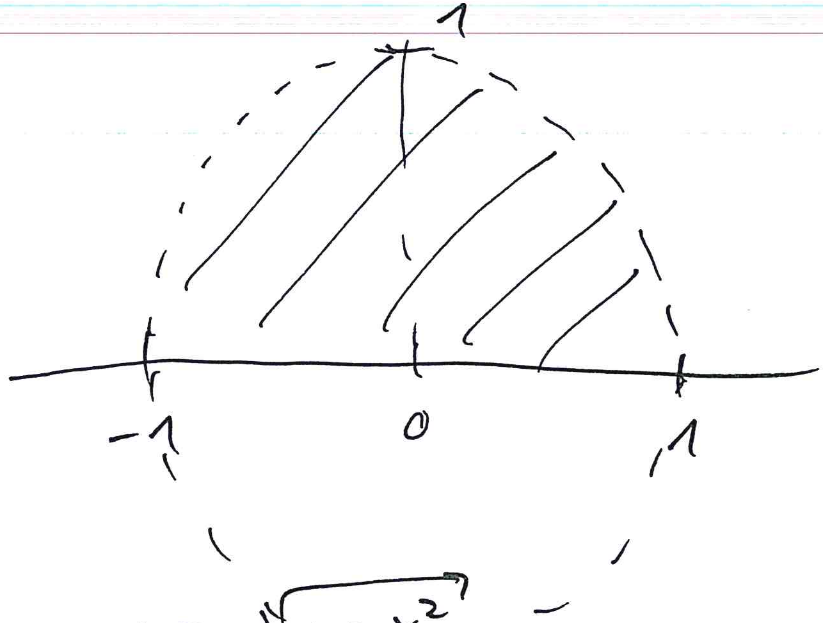
Úkol do pátku 23.4. pro ty, kteří neodevzdali na 3 a více cvičení žádný příklad:

příklad 5 – substituce v

$$\int \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x)+\cos(x)+2}\,dx$$



$\sigma = \frac{\pi}{2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

$x^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - x^2$

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &\geq -1 \\ -\cos(x) &\geq -1 \end{aligned}\right\}$$ nelze $\sin(x) = -1$ ~~a zá~~ $\wedge$ $\cos(x) = 1$

$$\sin(x) - \cos(x) \geq -2$$

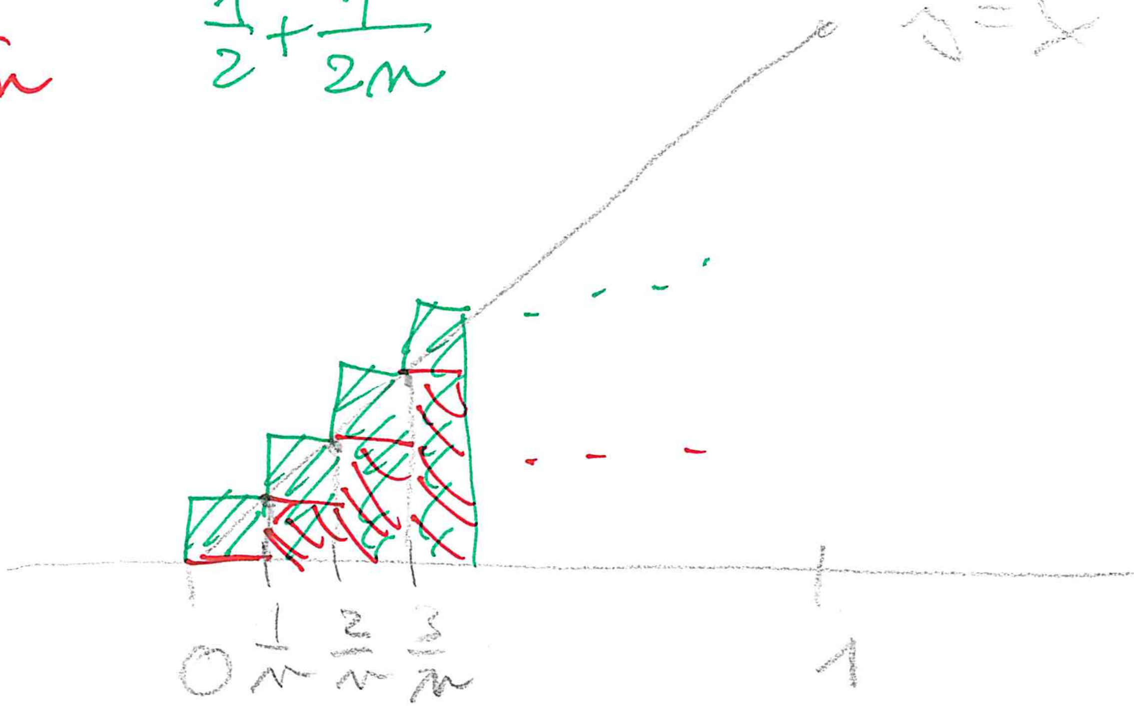
$$2 + \sin(x) - \cos(x) \geq 0$$

$$>$$

$f(x) = x$, $x \in [0,1]$ $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$

Dolní a horní integrální součet?

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$



sup dolních součtů

infimum horních součtů

Rozdíl : ~~horní~~ $HIS - DIS = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

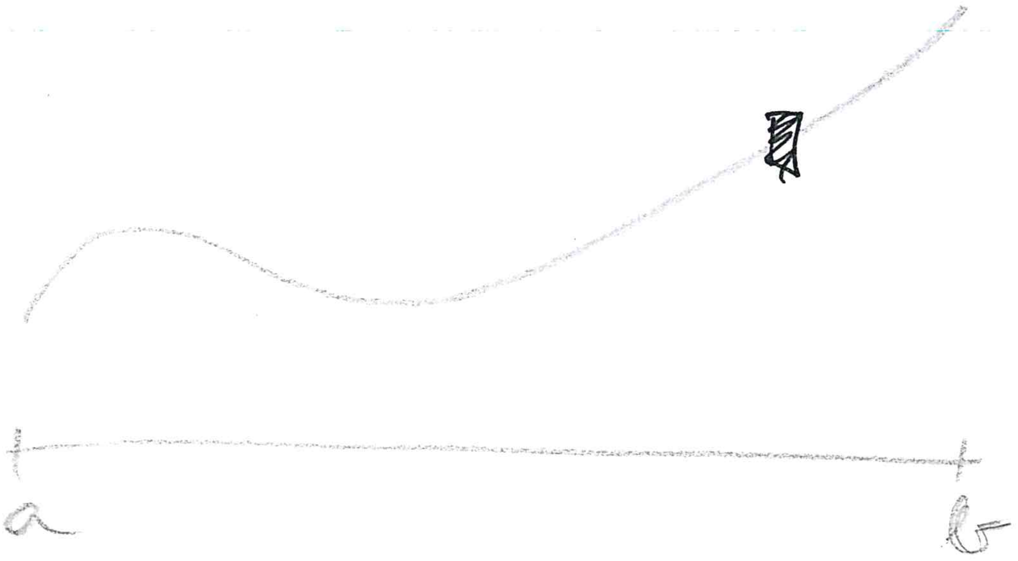
~~Tedy~~ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, tedy rozdíl $HIS - DIS$ můžu udělat libovolně malý

Lemma:

Funkce f má na intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existují HIS, DIS takové, že $HIS - DIS < \varepsilon$.

Obrázek:

spojitá funkce:

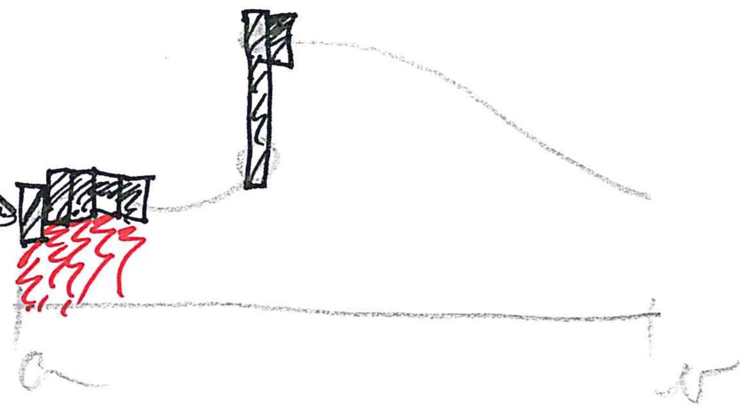


HIS − DIS = součet obsahů těch obdélníčků

nespojitost typu skok:

HIS = DIS +

DIS



Dirichletova funkce

$HIS \geq 1 \cdot (b-a)$

$DIS \leq 0(b-a)$

HIS je ~~odhad~~ ~~for~~ horní odhad $(R)\int_a^b f(x)\,dx$

DIS — " — dolní — " —

$(R)\int_a^b f(x)\,dx$ má pro nezápornou funkci význam obsahu, HIS, DIS jsou odhady tohoto obsahu:

$$DIS \le \underbrace{(R)\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{obsah}} \le HIS$$