Ah-21: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \rightsquigarrow \int f(t)\, dt$

$t = g(x)$

1. $$\int x\cdot \exp(-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x}_{g'(x)}\ \underbrace{\exp(\overset{t}{-x^2})}_{f(g(x))}\ \underbrace{dx}_{dx}\quad dt$$

provedení substituce:

$$t = -x^2$$

$$dt = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \exp(t)\,dt$$

počítání integrálu

$$-\frac{1}{2}\int \exp(t)\,dt = -\frac{1}{2}\exp(t)$$

zpětná substituce

$$-\frac{1}{2}\exp(t) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$$

zapsání výsledku

$$\int x\,\exp(-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$$

zkouška

$$\left(-\frac{1}{2}\exp(-x^2)\right)' = x\,\exp(-x^2)$$

$$2.\quad \int \frac{x}{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x^2+5}}_{\frac{1}{t}}\;\underbrace{2x\,dx}_{dt}$$

$$t = x^2+5$$

$$dt = 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

---

wyrechanie

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \int x^2 \cdot \frac{1}{x^6+1}\,dx =$

$$t = x^6+1$$
$$dt = 6x^5\,dx$$

$$= \int 6x^5 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^6+1}\,dx \quad dt \quad = \int \frac{1}{t\sqrt{t-1}}\,dt \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-1}} \cdot \frac{1}{t}$$

lepší substituce:

$$t = x^3$$

$$\frac{1}{3}\int 3x^2 \frac{1}{x^6+1}\,dx \quad dt \qquad \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

4. $\int x^3 \sqrt{x^4+1} \, dx$

$\frac{1}{4} \int 4x^3 \sqrt{x^4+1} \, dx$ dt

t

$t = x^4 + 1$

$\frac{1}{4} \int \sqrt{t} \, dt$

6. $\int \sin^5(x)\,dx = \int \sin(x)\cdot\sin^4(x)\,dx =$

$\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = (1-\cos^2(x))^2$

$= -\int -\sin(x)\,(1-\cos^2(x))^2\,dx$ dt

$t = \cos(x)$

$dt = -\sin(x)\,dx$

$-\int (1-t^2)^2\,dt$

4.2.

$$\int \frac{\exp(3t)+1}{\exp(2t)+1}\,dt = \int \frac{\exp(3t)+1}{(\exp(2t)+1)\exp(t)} \underbrace{\exp(t)\,dt}_{dx}$$

$$x = \exp(t)$$

$$\exp(2t) = x^2$$

$$\exp(3t) = x^3$$

$$dx = \exp(t)\,dt$$

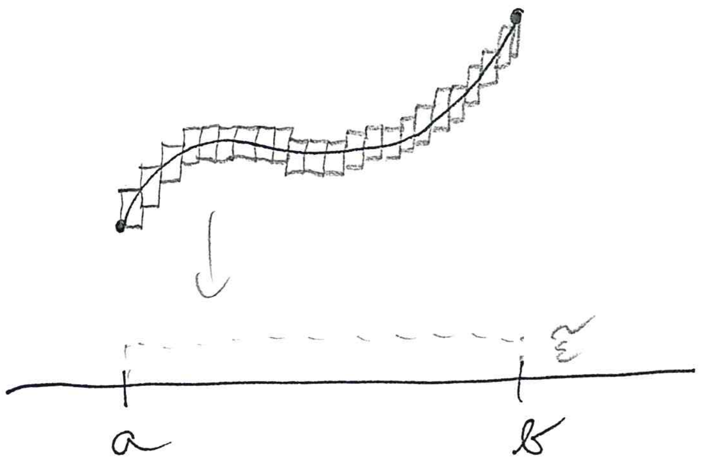
$$= \int \frac{x^3+1}{(x^2+1)\,x}\,dx$$

---

substituce s inverzní funkcí (minulý pokus):

$x = \exp(t)$, $t = \log(x)$ $\quad dt = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{\exp(3\log(x))+1}{\exp(2\log(x))+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$



Kolik je součet obsahů všech obdélníčků?

odpověď: ε

Pak z lemmatu z tohoto cvičení plyne, že fce má Riemannův integrál (tj. je Riemannovsky integrovatelná)

Obdélníčky mají společnou (tj. stejnou) výšku $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

K tomuto $\tilde{\varepsilon} > 0$ existuje $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti. (Použijeme větu, která říká, že funkce spojitá na uzavřeném intervalu I je na I stejnoměrně spojitá.)

Šířka obdélníčků je δ (kromě toho úplně vpravo – ten má šířku tolik, kolik zbyde).

Definice:

Pro $x = x_0$ definujeme $(R)\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = (R)\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$

Pro $x < x_0$ definujeme $(R)\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -(R)\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx$

Pro funkci f spojitou na (a,b) ~~definujeme a t~~
a $x_0 \in (a,b)$ definujeme pro $x \in (a,b)$

$$R(x) = (R)\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

(věta o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce zaručuje, že $R(x)$ je definován pro $x \in (a,b)$)

Veta:

Funkce R má derivaci na (a,b) a ta je

rovna $R'(x) = f(x)$.

Důsledek:

Je-li f spojitá na (a,b), pak k f existuje

na (a,b) primitivní funkce. (tou primitivní funkcí je Riemannův integrál R s proměnnou horní mezí)

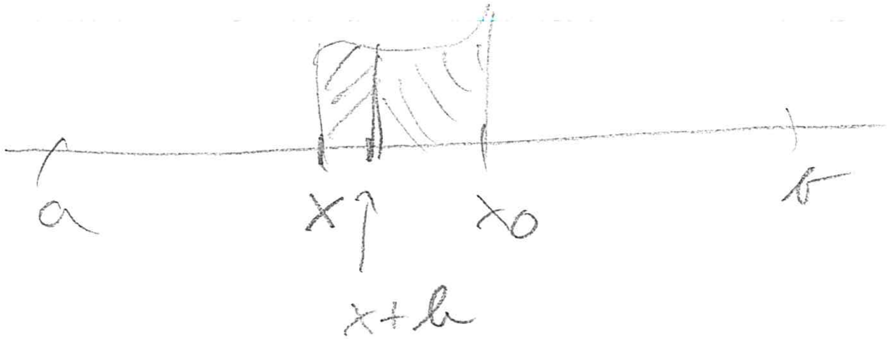
Důkaz vety:

rozdělíme na 6 případů – budeme dokazovat

$$R'_+(x) = f(x), \quad R'_-(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad x \in (a,x_0),\ x = x_0,\ x \in (x_0,b).$$

My si zde vybereme případ $R'_+(x) = f(x)$ pro $x \in (a,x_0)$.

Ostatní případy jsou jako úloha na doma.



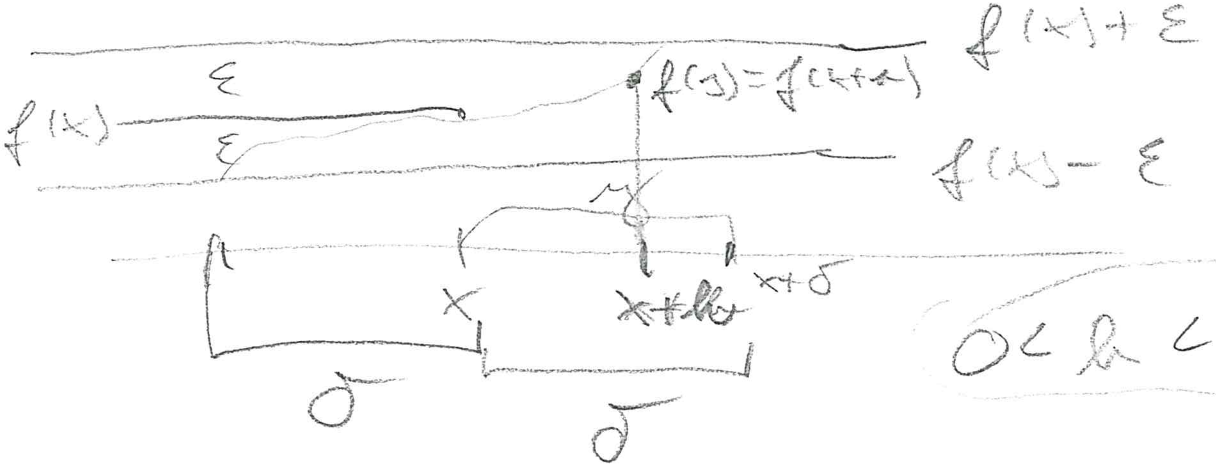
$$R(x) = -(R)\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx$$

$$R(x+h) = -(R)\int_{x+h}^{x_0} f(x)\,dx$$

$$x+h > x: \quad \underbrace{(R)\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx}_{-R(x)} = (R)\int_{x}^{x+h} f(x)\,dx + \underbrace{(R)\int_{x+h}^{x_0} f(x)\,dx}_{-R(x+h)}$$

$$-R(x) = (R)\int_x^{x+a} f(x)\,dx - R(x+a) \qquad \Big| + R(x+a)$$

$$R(x+a) - R(x) = (R)\int_x^{x+a} f(x)\,dx$$

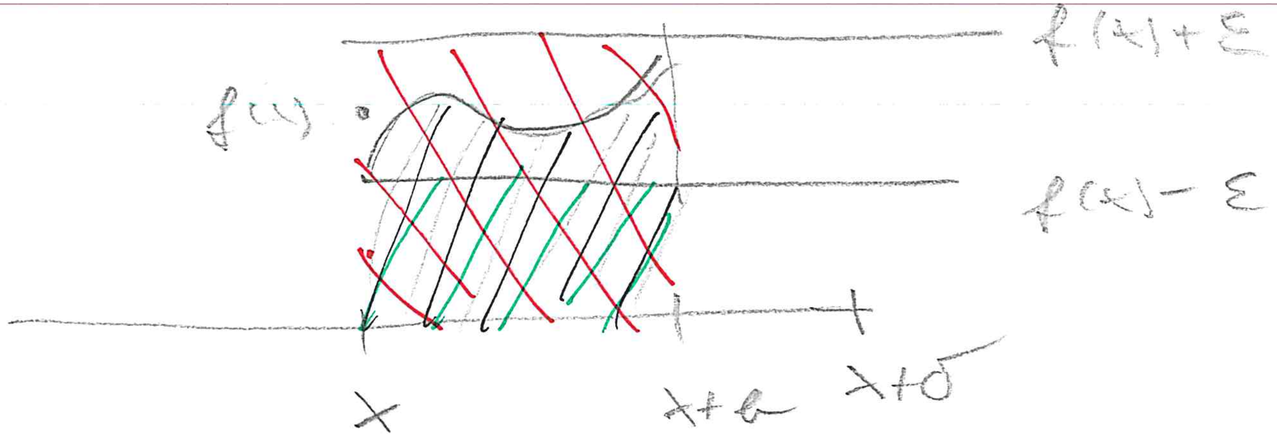


$0 < a < \delta$

ze spojitosti f v bodě x: ~~$f(x)$~~ pro $y \in (x; x+\delta)$ $(y = x+a)$

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$$

$$f(x) - \varepsilon < f(x+a) < f(x) + \varepsilon$$



$$\underbrace{h(f(x)-\varepsilon) \le (R)\int_x^{x+h} f(x)\,dx \le h\cdot(f(x)+\varepsilon)}_{\substack{R(x+h)-R(x) \\ \text{(viz dříve)}}} \qquad \Big| : h>0$$

$$f(x)-\varepsilon \le \frac{R(x+h)-R(x)}{h} \le f(x)+\varepsilon \qquad \Big| -f(x)$$

$$-\varepsilon \le \frac{R(x+h)-R(x)}{h} - f(x) \le \varepsilon$$

pokud bychom zde měli ??? $<$ $<$

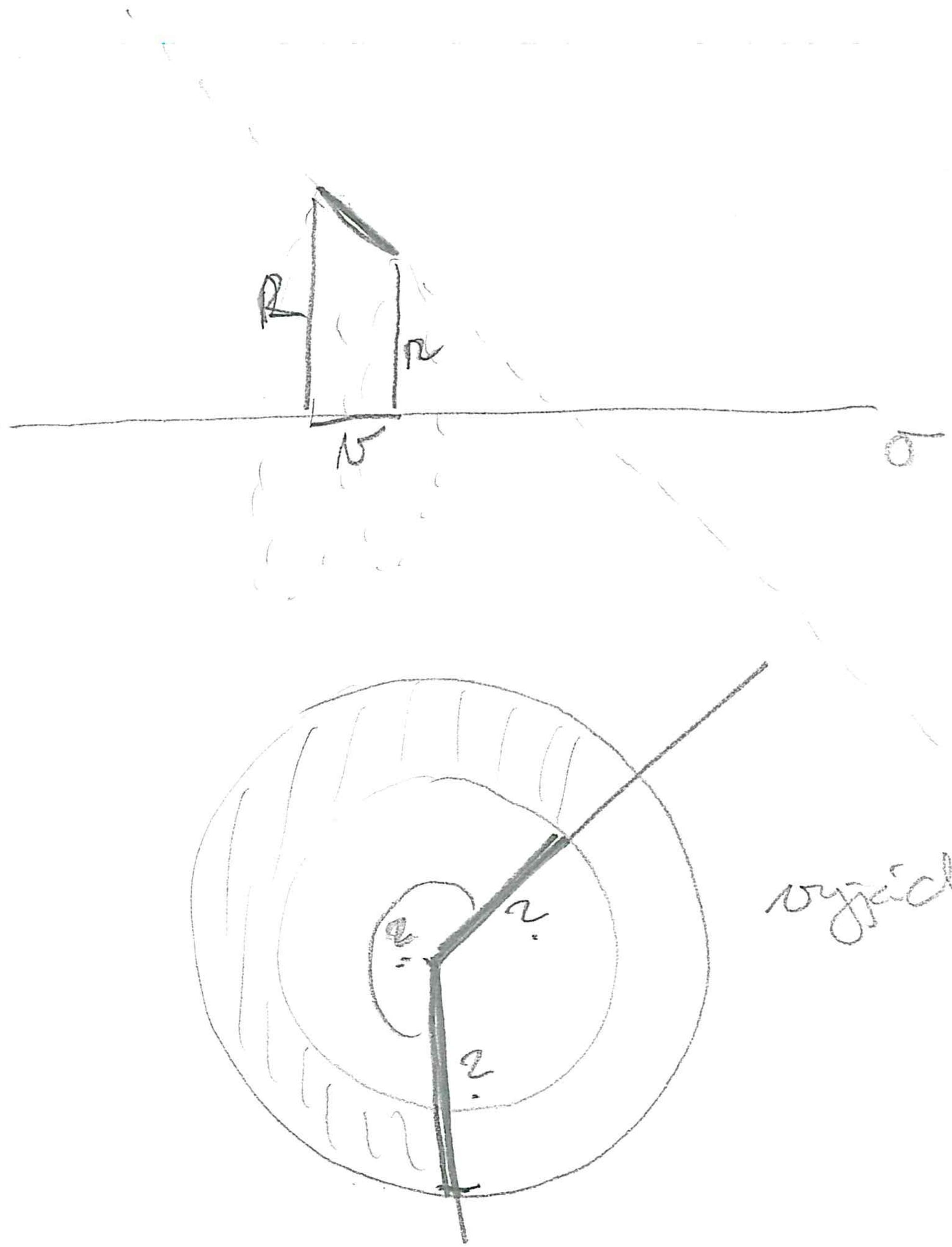
Ukázali jsme, že

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall h\in(0,\delta))\left(\frac{R(x+h)-R(x)}{h} - f(x) \in \underbrace{U_\varepsilon(0)}_{(-\varepsilon,\,\varepsilon)}\right)$$

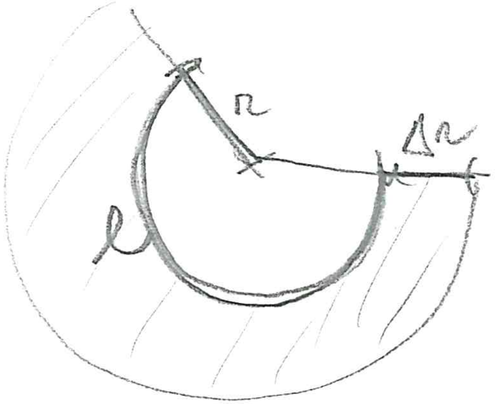
tedy $$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{R(x+h)-R(x)}{h} - f(x)\right] = 0$$

tedy $$\lim_{h\to 0^+}\frac{R(x+h)-R(x)}{h} = f(x)$$

tj. $$R'_+(x) = f(x) \qquad \square$$



vyjádřit pomocí r, R, v



obsah

$$\sigma = \text{celého mezikruží} \cdot \frac{l}{2\pi r}$$

$$\left(\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2\right)\frac{l}{2\pi r}$$

$$l\,\Delta r\left(1+ \qquad\right)$$

Příklady.

1. $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, rovnoměrné dělení $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$. OBRÁZEK, DOLNÍ A HORNÍ INTEGRÁLNÍ SOUČET
2. Dirichletova funkce $D(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ pro $x \notin \mathbb{Q}$ na intervalu $[0,1]$. Její dolní a horní Riemannův integrály jsou rovny

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{0}}^{1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\mathcal{R})\int_{0}^{\overline{1}} D(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

   a není tedy Riemannovsky integrovatelná.
3. Riemannova funkce R je pro $x \notin \mathbb{Q}$ definovaná $R(x) = 0$ a pro racionální číslo $x = p/q$ vyjádřené v nesoudělném tvaru je $R(x) = 1/q$. V [3] je ukázáno, že Riemannova funkce je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0,1]$ a její integrál je roven nule. Na straně 305 nahoře (elektronicky strana 49) je obrázek zobrazující horní integrální součet o velikosti ε pro (libovolně) malé $\varepsilon > 0$.

Lemma o Riemannovsky integrovatelné funkci. [1] Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existují dolní integrální součet $\mathcal{R}(f_d)$ a horní integrální součet $\mathcal{R}(f_h)$ funkce f takové, že $\mathcal{R}(f_h) - \mathcal{R}(f_d) < \varepsilon$.

TODO: OBRÁZEK, DŮKAZ

Věta o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce. [2] Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$, pak je na tomto intervalu Riemannovsky integrovatelná.

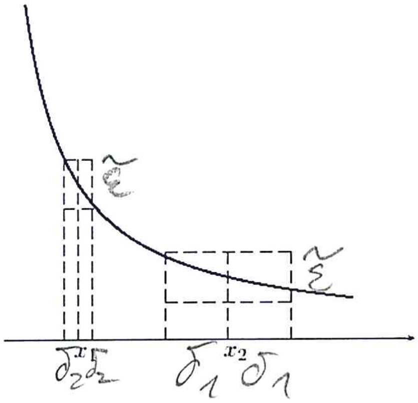
K důkazu potřebujeme pojem stejnoměrné spojitosti.
Spojitost funkce f na intervalu I lze zapsat

$(\forall x_0 \in I)$(funkce f je spojitá v bodě x_0, pokud je x_0 krajní bod, tak jednostranně zevnitř intervalu)

nebo formálněji

$$(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon))$$

[1] [3], Věta 11.2.12, strana 299, elektronicky 43
[2] [3], Věta 11.2.23, strana 303, elektronicky 47



Na obrázku je graf spojité funkce, která má v bodě vlevo nevlastní limitu.

V bodech x_1, x_2 jsou vyznačena okolí funkčních hodnot $f(x_1)$, $f(x_2)$ o stejné velikosti $\varepsilon > 0$ a k nim okolí bodů x_1, x_2 splňující podmínku z definice spojitosti.

Vidíme, že číslo δ se pro různá x liší. Při zmenšování x_1, tedy při jeho posouvání doleva, se velikost δ dále zmenší.

Tím se liší spojitá funkce od stejnoměrně spojité funkce – u té je k zadanému ε stejné δ pro všechna x.

Definice. Funkci f nazveme *stejnoměrně spojitou na intervalu* I, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Bez důkazu uvedeme větu o stejnoměrné spojitosti na uzavřeném intervalu[3]. Poznamenejme ještě, že funkce, jejíž graf je na obrázku nahoře, je spojitá na intervalu zleva otevřeném a v levém krajním bodě má nevlastní limitu. Není ji tedy možné do levého krajního bodu spojitě rozšířit.

Věta. Je-li funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

DŮKAZ věty o Riemannovské integrovatelnosti spojité funkce.
TODO: DŮKAZ, OBRÁZEK

13.2.1 Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

Budeme uvažovat funkci f, která má na intervalu $I = [a, b]$ Riemannův integrál a budeme zkoumat funkci

$$R : x \mapsto \begin{cases} (\mathcal{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t & x \in (a, b] \\ 0 & x = a \end{cases} \tag{13.5}$$

[3] [3], Věta 11.1.3, strana 296, elektronicky 40