# PERIODICKÉ DESETINNÉ ROZVOJE

$0.7\overline{29} = x$

$100x = 72.9\overline{29}$

$100x - x = 72.9 - 0.7 = 72.2$ — podotknutí: $0.0\overline{29}$ je konečné číslo ($g = \frac{1}{100}$)

$99x = 72.2$

$x = \frac{722}{990}$ převedli jsme a ukázali, že $x \in \mathbb{Q}$

Platí: $x \in \mathbb{Q} \iff$ desetinný rozvoj $x$ je periodický (nebo konečný – $1.23 = 1.23\overline{0}$)

naleznete návod pro

$\Leftarrow$

Jak se dokáže $\Rightarrow$ ? Rozmyslet si do cvičení.

# NEKONEČNÉ ŘADY

Definice:

Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme nekonečnou řadou.
(někdy jen řadou)

Čísla $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

nazýváme částečnými součty řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Pokud má posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$,

pak $L$ nazýváme součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a

říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má součet.

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pokud má součet $L \in \mathbb{R}$.

Řekneme, že řada <u>osciluje</u>, pokud posloupnost částečných součtů nemá limitu.

(Př: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$)

<u>Divergentní řada</u> – ~~pravidla~~ vždy označuje řadu se součtem $L \in \{+\infty, -\infty\}$

(není jednotné používání)

– někdy zahrnuje i oscilující řadu

$$0.7\overline{29} = 0.7 + \underbrace{\frac{29}{10^3} + \frac{29}{10^5} + \frac{29}{10^7} + \dots}_{\text{geometrická řada s kvocientem } q = \frac{1}{100}}$$

# GEOMETRICKÁ ŘADA

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$$

$$s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1}$$

$$q\, s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$$

$$s_n - q\, s_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$s_n (1-q) = a_1 (1-q^n)$$

for $q \neq 1$:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

for $q = 1$

$$s_n = n\, a_1$$

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = ?$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ : (1) $q = 1$

$$\cancel{s_n = n a_1 \begin{cases} +\infty & \text{for } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{for } a_1 < 0 \\ 0 & \text{for } a. \end{cases}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n a_1 = \begin{cases} +\infty & \text{for } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{for } a_1 < 0 \\ 0 & \text{for } a_1 = 0 \end{cases}$$

(2) $q \neq 1$

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

? $\lim_{n \to \infty} q^n = ?$

(n zaměníme za $x$
a vyšetříme
$\lim_{x \to +\infty} q^x$ – mocninná funkce)

| $q$ | limita |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |
| $q > 1$ | $+\infty$ |
| $q \in (0, 1)$ | 0 |
| $q \in (-1, 0)$ | 0 |
| $-1$ | limita neexistuje |
| $q < -1$ | limita neexistuje |

quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{a_1}{1-g} \quad \text{per } g \in (-1, 1)$$

$$(|g| < 1)$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & a_1 > 0 \\ -\infty & a_1 < 0 \\ 0 & a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{per } g > 1$$

$$\cancel{a_1 \lim_{n \to \infty} \frac{1-g^n}{1-g} = a_1 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{g} - g^{n-1}}$$

Závěr:

pro $|q| < 1$ je geometrická řada konvergentní

a její součet $s = \dfrac{a_1}{1-q}$

pro $q \geq 1$, $a_1 \neq 0$ je $s = a_1 \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & a_1 > 0 \\ -\infty & a_1 < 0 \end{cases}$

pro $q \leq -1$ a $a_1 \neq 0$ nemá řada součet