DMC 7.1.2024

Nutná podmínka konvergence řady

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

Věta:

Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (tj. má součet a ten je konečný), pak platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Důkaz:

$$a_n = \cancel{a_k}\ s_n - s_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} =$$

věta o limitě rozdílu

$$= s - s = 0$$

(s je součet řady) $s \in \mathbb{R}$

$\square$

Příklady:

1) geometrická řada:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_1 q^{k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_1}{q} \cdot q^k = \quad (q \neq 0)$$

$$= \frac{a_1}{q} \lim_{k\to\infty} q^k = \begin{cases} 0 & q \in (-1,1) \\ \text{neex. jinak nebo } \neq 0 & \end{cases}$$

geometrická řada pro $q \in (-1,1)$

Závěr: Pro geometrickou řadu je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ nutná i postačující podmínka konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2) harmonická řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$a_k = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$ podmínka je splněna

Později (ještě dnes) uvidíme,

že $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$ řada nekonverguje

2) $$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k = +\infty$$

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} 2^k = +\infty$$

Nemůže nastat: $\sum a_k \in \mathbb{R}$ .. řada konverguje

neplatí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

$A \Rightarrow B$ A je postačující podmínka B

B je nutná podmínka A

~~Vlastnosti řad:~~ Operace s řadami

1) $$\sum_{k=1}^{\infty} c\,a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

důkaz:

$$\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

použijeme větu o limitě součinu (násobku)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c a_k}= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \cancel{c a_k}\, c\cdot a_k} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} a_k} =$$

$$= c \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k} = c \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

2) „vložení nul":

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \dots$$

$$s_1 = \frac{1}{2},\quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6};\ \dots$$

$$0,\ s_1,\ s_1,\ s_2,\ s_2,\ s_3,\ s_3\ \dots$$

3) $$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) =$$

↑ věta o limitě součtu

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Závěr: řady lze sčítat člen po členu

Použití vlastností na harmonickou řadu:

v textu jsme odvodili z

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots$$

$$\frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

kdyby $s_1 \in \mathbb{R}$, tak by

$$0 = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{>0} + \dots$$

není reálné, proto $s_1 = +\infty$,

(nebo $s_1 = -\infty$ nebo s_1 neexistuje)

ukážeme, že nemůže nastat

ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad (\forall k \in \mathbb{N})(a_k \geq 0)$$

Lemma:

Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ řada s nezápornými členy, pak je posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ neklesající.

Důkaz:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

protože $a_{n+1} \geq 0$ $\square$

Důsledek:

Řada s nezápornými členy má součet.

Proč?: Neklesající posloupnost má limitu.

Součet je také nezáporný.

Příklad tzv. „teleskopické řady"

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{-1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots$$

$$+\ldots\cancel{}\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$

$$=\frac{\pi^2}{6}\qquad = 2\ ?$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Chceme ukázat, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \in \mathbb{R}$
$< +\infty$

$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)} > \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{s_n} > \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}_{t_n} > \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}}_{r_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(s_n > t_n > r_n)$$

limitní přechod v nerovnosti

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} t_n \geq \lim_{n\to\infty} r_n$$

odtud:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq 1 \geq \cancel{-1 + \sum \frac{1}{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

odtud $\displaystyle 2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq 1$

Věta (srovnávací kritérium pro konvergenci řad s nezápornými členy)

Nechť $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \geq b_k \geq 0)$,

pak $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Speciálně z $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$ plyne $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathbb{R}$

z $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$ plyne $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$

jiným slovy: pokud $\sum a_k$ konverguje,

pak i $\sum b_k$ — " —

pokud $\sum b_k$ diverguje,

pak i $\sum a_k$ diverguje.

Důkaz:

z $a_k \geq b_k$ plyne $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} b_k$

a limitním přechodem dostaneme
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad \square$$

Ještě jednou harmonická řada:

$$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\cancel{b_k = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1} + \frac{1}{8}}$$

$$c_k = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}$$

$$\underbrace{\cancel{b_k \geq a_k}}_{\mathrm{I}} \underbrace{\geq c_k}_{\mathrm{II}} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}$$

$$\cancel{\sum b_k = +\infty}$$

$$\sum c_k = +\infty$$

$\sum c_k = +\infty$, z něj plyne, že

$$\text{i} \quad \sum a_k = \sum \frac{1}{k} = +\infty$$

Další příklad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1}$$

$$\frac{k^2+1}{k^4+1} = \underbrace{\frac{k^2}{k^4}}_{=\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^4}} \to 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^4}} = 1$$

z definice limity posloupnosti

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ ex. n_0 takové, že pro $k > n_0$

platí $\frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^4}} \in \left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$

tedy pro $k > n_0$ je $\frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^4}} > \frac{1}{2}$

$$\frac{k^2+1}{k^4+1} > \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{2} < +\infty$$

pro $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1}$ ~~[illegible] plyne~~

$$\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

pro $k > n_0$ je $\dfrac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^4}} < \dfrac{3}{2}$

$$\frac{k^2+1}{k^4+1} < \frac{1}{k^2}\cdot\frac{3}{2} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{2k^2} < +\infty$$

odkud a ze srovnávacího kritéria

plyne
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4+1} < +\infty$$

(tj. řada konverguje)

Další příklady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{k+2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$(\forall k \in \mathbb{N})$

$$\sum \frac{1}{k^3} < +\infty \Leftarrow \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} \qquad \sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$

$$\text{nic} \Leftarrow \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k} \qquad \sum \frac{1}{k} = +\infty$$

$$\text{nic} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k^2}$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$$

$$\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{k+2} = \frac{\sqrt{k}}{k} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}{1+\frac{2}{k}}$$

$$\frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}{1+\frac{2}{k}} \to 2$$

a z $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}{1+\frac{2}{k}} = 2$

plyne, že k $\varepsilon = 1$ ex. n_0 takové, že pro $k > n_0$ je

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}{1+\frac{2}{k}} \in (2-1,\ 2+1)$$

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}{1+\frac{2}{k}} > 1 \quad \Big/ \cdot \frac{\sqrt{k}}{k}$$

$$\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{k+2} > \frac{1}{\sqrt{k}}$$

odtud

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{k+2} = +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}{1+\frac{2}{k}}$$

pro k velké

~ 2