$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \qquad a_k = \frac{k^2}{2^k}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{(k+1)^2}{\cancel{2^{k+1}}\,2}}{\dfrac{k^2}{\cancel{2^k}}} = \ldots\ldots =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{2k^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2} \in [0,1)$$

$(\forall \varepsilon > 0)$

$$(\exists n_0)(\forall k \in \mathbb{N},\ k > n_0)\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$$

zvolíme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, pak $\frac{1}{2} + \varepsilon = \frac{3}{4} = q < 1$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < q \quad \text{pro } k > n_0, \text{ tak}$$

odtud

$$a_n = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}}}_{<q} \cdot \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}_{<q} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{a_{[n_0]+2}}{a_{[n_0]+1}}}_{<q} \cdot a_{[n_0]+1}$$

$$a_n < q^{n-([n_0]+2)+1} \cdot a_{[n_0]+1} =$$

$$= q^n \frac{a_{[n_0]+1}}{q^{[n_0]+1}}$$

$a_n < q^n \cdot$ číslo nezávislé na n

$a_n = \frac{n^2}{2^n} > 0$ $\qquad \sum_{n=[n_0]+1}^{+\infty} q^n \cdot$ číslo

konverguje

odtiaľ a zo srovnávacieho

kritéria plyne

$\sum_{n=[n_0]+1}^{\infty} a_n$ konverguje

a tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

Věta: ~~Podíl~~ Limitní podílové kritérium konvergence

Nechť $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, (tedy i s nezápornými členy.)

nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta:

Nechť $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$,

nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz:

Označme $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a

~~zvolme $L' \in$~~

pro $L \in \mathbb{R}$ ~~ε~~ zvolme $L' = L - \underbrace{\frac{L-1}{2}}_{\varepsilon>0} = \frac{1+L}{2}$

pro $L = +\infty$ zvolme $L' = 2$

z definice limity plyne:

$$(\exists n_0)(\forall k \in \mathbb{N},\ k > n_0)\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} > L' > 1\right)$$

(mohli jsme zvolit $L' = 1$)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \Big|\cdot a_k$$

$$a_{k+1} > a_k$$

posloupnost členů $\{a_k\}$ je rostoucí (od $k = n_0+1$ počínaje), proto není možné, aby platila nutná podmínka konvergence

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

odkud plyne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

$\square$