(1')

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Věta (Leibnizovo kritérium konvergence alternující řady)

~~Nechť~~ ~~$(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \geq 0)$, pak~~

~~řada~~ ~~$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ je konvergentní~~

~~právě když.~~

Nechť $\{a_k\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1} \leq a_k)$, dále nechť $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \geq 0)$.

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ konverguje právě když splňuje nutnou podmínku konvergence: $\lim_{k \to \infty} (-1)^{k+1} a_k = 0$ (je ekvivalentní s $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$)

Důkaz:

řada konverguje $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_k = 0$

níže

$\Leftarrow$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = \underbrace{a_1 - a_2}_{\geq 0} + \underbrace{a_3 - a_4}_{\geq 0} + a_5 - a_6$$

a platí:

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq s_{2n} \leq s_{2n+2}$$

tj $\{s_{2n}\}$ je neklesající posloupnost

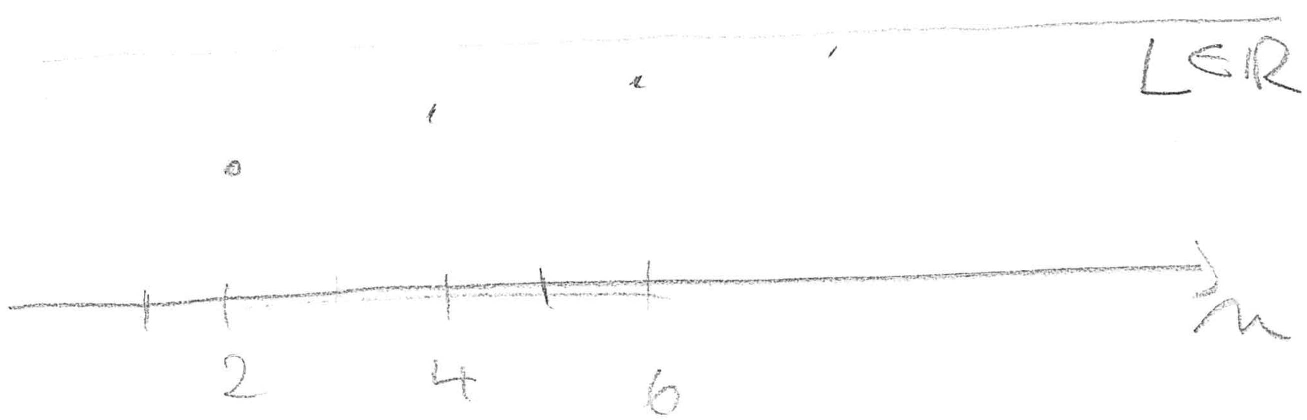
$$s_1 \geq s_2 \leq s_3 \dots s_{2n-1} \geq s_{2n} \leq s_{2n+1}$$

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \dots \geq s_{2n-1} \geq s_{2n+1}$$

tj $\{s_{2n-1}\}$ je nerostoucí

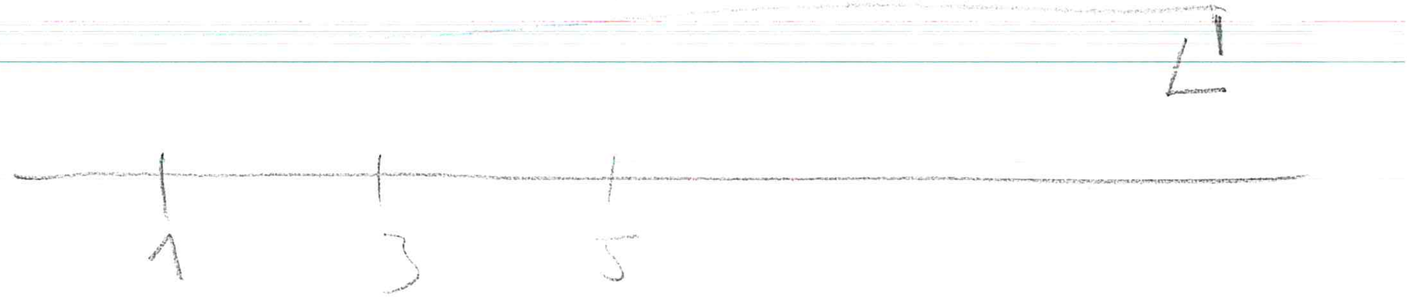
$$\Rightarrow s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq s_1$$

$\{s_{2n}\}$ je neklesající a shora omezená



tj $\exists \lim s_{2n} = L \in \mathbb{R}$

$s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq 0$



$\{s_{2n+1}\}$ je nerostoucí zdola omezená,

tedy $\lim s_{2n+1} = L' \in \mathbb{R}$

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{\overset{=1}{(-1)^{2n+1+1}}\, a_{2n+1}}_{\to 0 \text{ pro } n \to \infty}$$

odtud

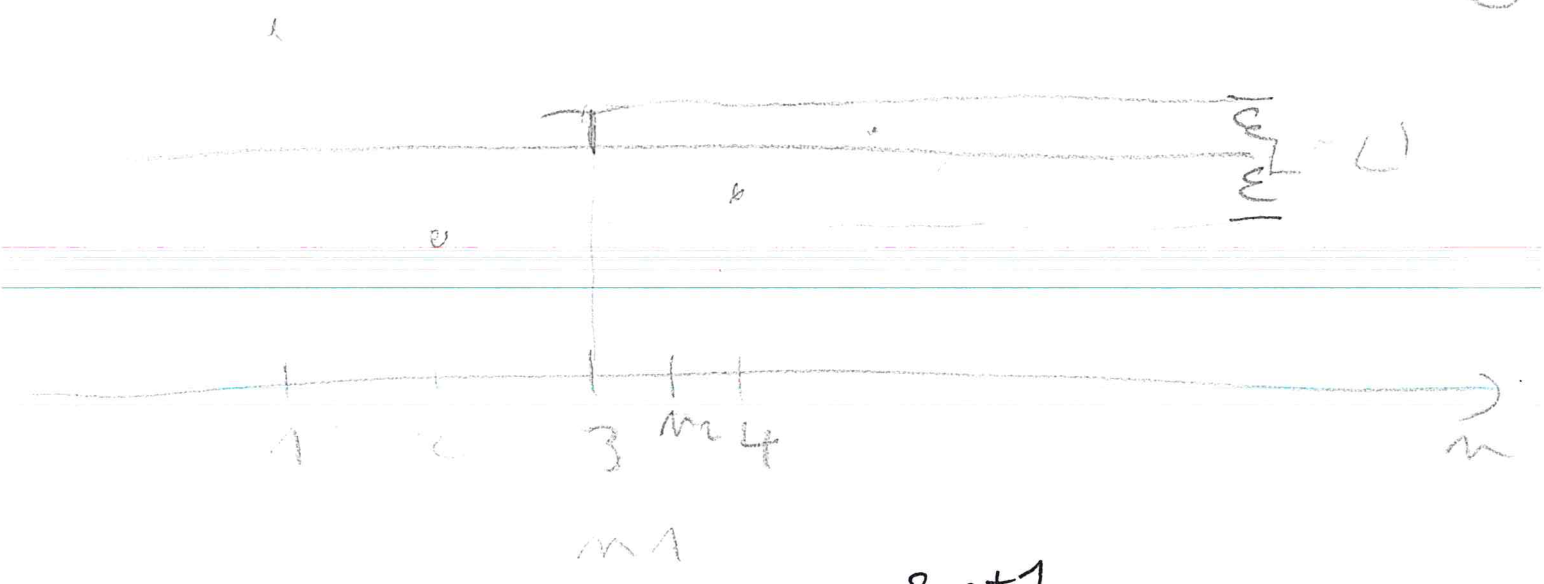
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim \left(s_{2n} + (\cancel{\;\;})\, a_{2n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \underbrace{\lim a_{2n+1}}_{=0}$$

odtud $L = L'$

zbývá ukázat: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$

tj $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\left(s_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)\right)$



tvr: $(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, \overset{2n+1}{\cancel{n}} > n_1)(\Delta_{2n+1} < L+\varepsilon)$

$\Delta_{2n+1} \geq L$

(plyne z toho, že $\{\Delta_{2n+1}\}$ je nerostoucí a má limitu L)

$(\exists n_2)(\forall n \in \mathbb{N}, \overset{2n}{n} > n_2)(\Delta_{2n} > L-\varepsilon)$

$\Delta_{2n} \leq L$

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak

pro $n \in \mathbb{N}, n > n_0$

$\cancel{\Delta_n \leq L+\varepsilon}$

$L-\varepsilon < \Delta_n < L+\varepsilon$

tj $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = L$ D

Důsledek věty:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{konverguje}$$

protože: $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ je klesající

(tedy je i nerostoucí)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

Definice:

Řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazveme absolutně konvergentní řadou, pokud konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Příklady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

nekonverguje absolutně

konverguje absolutně

$$\left|\frac{\sin(k)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

srovnávací kritérium dá, že $\sum \frac{\sin(k)}{k^2}$ absolutně konverguje

Kritéria absolutní konvergence řad:

1

a) Limitní podílové kritérium

Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, pak

řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak

řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje absolutně.

2 Srovnávací

$(\forall k \in \mathbb{N})(|a_k| \leq |b_k|)$, pak

z absolutní konvergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

plyne absolutní konvergence

řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Příklad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{2^k} \qquad a_k = \frac{(-1)^k \cdot k}{2^k}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{\cancel{(-1)^{k+1}}(k+1)}{2^{k+1}}}{\frac{\cancel{(-1)^k} k}{2^k}}\right| = \frac{(k+1)\cancel{2^k}}{\cancel{2^{k+1}}_{2}\, k} =$$

$$= \frac{k+1}{2k} \to \frac{1}{2} < 1$$

Závěr: řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^k}$

absolutně konverguje

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(k)}{2^k}$$

$$\left|\frac{k \sin(k)}{2^k}\right| \leq \left|\frac{(-1)^k k}{2^k}\right|$$

odhad a z příkladu nahoře plyne

absolutní konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(k)}{2^k}$

Věta:
Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pak konverguje.

Důkaz:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

$m > n$: $\quad s_m - s_n = a_m + a_{m-1} + \dots + a_{n+1}$

$$z_m - z_n = |a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1}|$$

trojúhelníková nerovnost:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x+y| \leq |x| + |y|)$$

$$|s_m - s_n| = |a_m + \underbrace{a_{m-1} + \dots + a_{n+1}}| \leq$$

$$\leq |a_m| + | \qquad | \leq |a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1}| = |z_m - z_n|$$

ukázali jsme, že pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ je

$$|s_m - s_n| \leq |z_m - z_n| \quad (*)$$

Předpokládáme: $\lim_{n \to \infty} z_n \in \mathbb{R}$, tj.

$\{z_n\}$ konverguje,

odtud plyne, že $\{z_n\}$ je Cauchyovská

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n, m \in \mathbb{N},$
$n > n_0, m > n_0)(|z_n - z_m| < \varepsilon)$

z $|z_n - z_m| < \varepsilon$ a (z) $(*)$

plyne $|s_n - s_m| < \varepsilon$,

odtud plyne, že $\{s_n\}$ je Cauchy-ovská a odtud plyne, že

$\{s_n\}$ je konvergentní posloupnost.

Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. $\square$

Příklad: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\cancel{k^2+k+1+f(k)}\, f(k)}}{k^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{f(k)}}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{k+5}{3}}}{k^3}$$

absolutně konvergují, tedy i konvergují

není pravda, že konverguje abs.

o konvergenci nelze nic říct

(může a nemusí)

PŘEROVNÁNÍ ŘAD

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$

$a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + \ldots$

$a_2 + a_1 + a_4 + a_6 + a_3 + \ldots$

Definice:

Nechť $\{k_n\}$ je posloupnost ~~obsahující~~ přirozených čísel takovou, že každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje právě jednou. Pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$

nazýváme přerovnáním řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Věta:

Nechť $\sum a_k$ je řada s nezápornými členy – tj. $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \geq 0)$.

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je přerovnání řady $\sum a_k$.

Pak obě řady mají stejný součet.

Důkaz:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$t_m = \sum_{n=1}^{m} a_{k_n}$$

Tvrdím: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(t_m \geq s_n)$

m zvolíme tak, aby ~~přerovnání~~ mezi $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ byly všechny členy $a_1, \dots, a_n$

odtud $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (*)$

protože $\sum a_k$ je přerovnání

$\sum a_{k_n}$, platí i opačná

nerovnost k $(*)$

odtud plyne rovnost. $\square$

Věta:

Je-li $\sum a_k$ absolutně konvergentní

řada a $\sum a_{k_n}$ její přerovnání,

pak jsou obě řady konvergentní

a mají stejný součet.

Důkaz:

konvergence $\sum a_k$ plyne z její absolutní konvergence.

Z předchozí věty plyne, že řady $\sum |a_k|$, $\sum |a_{k_n}|$ mají ~~stejný~~ stejný součet. Tedy $\sum a_{k_n}$ je absolutně konvergentní, tedy je i konvergentní.

Ukážeme, že $\sum a_k = \sum a_{k_n}$

$$a_k = b_k - c_k$$

př. $a_k = 5 \quad b_k = 5 \quad c_k = 0$

$a_k = -4 \quad b_k = 0 \quad c_k = 4$

$$b_k = \begin{cases} a_k \;\; |a_k| & a_k > 0 \\ 0 & a_k \leq 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & a_k \geq 0 \\ -a_k \;\; |a_k| & a_k < 0 \end{cases}$$

pro $k \in \mathbb{N}$: $\quad b_k \geq 0, \quad c_k \geq 0$

$$\cancel{b_k \leq |a|}$$

$$0 \leq b_k \leq |a_k|$$

$$0 \leq c_k \leq |a_k|$$

$\sum a_k$ je absolutně konvergentní, tedy $\sum |a_k|$ je konvergentní, odtud srovnávacího kritéria dostaneme, že $\sum b_k$, $\sum c_k$ jsou konvergentní

$b_k \in \mathbb{R}$

odtud a z $a_k = b_k - c_k$ $\quad \sum a_k \in \mathbb{R}$

plyne
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - c_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} c_k$$

$n \to \infty$ a použijeme větu o limitě rozdílu:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

přerovnání $a_{k_n} = b_{k_n} - c_{k_n}$

$$\sum b_k = \sum b_{k_n}$$

$$\sum c_k = \sum c_{k_n}$$

viz předchozí věta

odtud $\sum a_k = \sum a_{k_n}$ $\square$